SÉRIE E
No D'ORDRE :
54

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Louis SACKMANN

COLLABORATEUR SCIENTIFIQUE DU MINISTÈRE DE L'AIR

1re THÈSE

L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES AU VOISINAGE DES POINTS SINGULIERS DES OBSTACLES

2e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LES LOIS GÉNÉRALES DE LA VISCOSITÉ DES LIQUIDES

Soutenues le 6 Juillet 1936, devant la Commission d'Examen

Jury — MM. THIRY — *Président.*
FOEX
H. WEISS — *Examinateurs.*

L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES AU VOISINAGE DES POINTS SINGULIERS DES OBSTACLES

SÉRIE E
Nº D'ORDRE :
54

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Louis SACKMANN

COLLABORATEUR SCIENTIFIQUE DU MINISTÈRE DE L'AIR

1re THÈSE

L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES AU VOISINAGE DES POINTS SINGULIERS DES OBSTACLES

2e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LES LOIS GÉNÉRALES DE LA VISCOSITÉ DES LIQUIDES

Soutenues le 6 Juillet *1936, devant la Commission d'Examen*

Jury : MM. THIRY — *Président.*
FOEX
H. WEISS — *Examinateurs.*

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

MM.

Doyen	A. DANJON	Professeur d'Astronomie.
Doyen honoraire	E. BATAILLON.	
Professeurs honoraires	E. CHATTON, E. ESCLANGON, M. FRÉCHET, H. GAULT, M. GIGNOUX, L. HACKSPILL, E. DE MARGERIE, G. RIBAUD, E. TOPSENT, G. VALIRON, H. VILLAT.	

Professeurs	P. WEISS	Physique générale.
	E. ROTHÉ	Physique du Globe.
	H. OLLIVIER	Physique générale.
	C. HOUARD	Botanique.
	E. TERROINE	Physiologie générale.
	J. DE LAPPARENT	Minéralogie et pétrographie.
	R. THIRY	Mécanique rationnelle.
	G. CERF	Analyse supérieure.
	G. DUBOIS	Géologie et paléontologie.
	P. FLAMANT	Calcul différentiel et intégral.
	E. CORNEC	Chimie générale.
	P. DE BEAUCHAMP	Zoologie et anatomie comparée.
	L. BOUNOURE	Biologie générale.
	R. ROMANN	Chimie minérale et chimie physique.
	G. FOEX	Physique expérimentale.
	A. KIRRMANN	Chimie organique.
	H. CARTAN	Mathématiques générales.
	H. CHERMEZON	Botanique.
	G. REMPP	Physique du Globe.
	J. LACOSTE	Physique du Globe.
	H. WEISS	Physico-chimie du pétrole.
	G. HUGEL	Chimie du pétrole.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Maîtres de conférences	Ch. STAEHLING	Chimie appliquée.
	P. SOLEILLET	Physique mathématique.
	R. BONNET	Physique et chimie biologiques.
	A. ROUSSEL	Mathématiques générales.
	A. CHRÉTIEN	Chimie minérale.
	J. MARESQUELLE	Botanique.
	R. HOVASSE	Biologie générale.
	P. A. REMY	Zoologie.
	H. FORESTIER	Chimie.
	L. NÉEL	Physique générale.
	R. HOCART	Minéralogie.
	A. WEIL	Mathématiques.

Secrétaire	G. CUVIER.	

A MA FAMILLE

A MES MAITRES

Les recherches que je rapporte dans ce mémoire ont été entreprises au

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DES FLUIDES
DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
(CRÉATION DU MINISTÈRE DE L'AIR)

avec l'aide matérielle du Service des Recherches de l'Aéronautique.

Je tiens, avant de commencer mon exposé, d'exprimer mes sentiments de profonde reconnaissance à

Monsieur le Professeur THIRY,

Correspondant de l'Institut
Directeur de l'Institut de Mathématiques et du Laboratoire de Mécanique des Fluides
de l'Université de Strasbourg

pour les précieux conseils qu'il m'a toujours prodigués avec tant d'enthousiasme et pour l'intérêt qu'il a porté à l'évolution de mes recherches.

TABLE DES MATIÈRES

PAGES

Introduction 1

Chapitre premier

APPAREILS ET MONTAGES

Généralités 3

Appareils.

Le tunnel hydrodynamique à section variable et à alimentation continue.. .. 5

Le canal d'écoulement à niveau libre. 8

L'appareil à écoulement en couches très minces 10

Chapitre II

ÉTUDE DES POINTS DE BIFURCATION

PHÉNOMÈNE DES ENROULEMENTS

Description de l'écoulement dans le plan de symétrie vertical 13

Description de l'écoulement dans l'espace 18

Évolution du phénomène des enroulements 20

Notice bibliographique 32

Chapitre III

ÉTUDE DU DÉCOLLEMENT

ANGLES DE DÉCOLLEMENT - RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

Principe des mesures 33

Étude de la ligne de décollement. 35

Variation de l'angle de décollement en fonction de la vitesse. Régimes d'écoulement. 35

Évolution de la forme de la ligne de décollement.. 37

Investigation d'un écoulement au voisinage immédiat des parois par autoinscription des filets fluides. Méthode de l'iode 38

Variation de l'angle de décollement et évolution des régimes d'écoulement en fonction de l'écartement des glaces 40

Chapitre IV

LES ÉCOULEMENTS CYLINDRIQUES

Détermination précise des vitesses (et des accélérations) par strobo-photographie de gouttelettes.. 48

Distribution des vitesses dans le canal 52

Phénomène des enroulements. 52
Décollement 55
Théorie élémentaire de la genèse des plages et des enroulements 56

Chapitre V

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES

Sur la similitude des écoulements entre glaces parallèles.

Généralités.. 58
Application élémentaire de la loi de similitude aux écoulements entre glaces parallèles 59
Généralisations de la loi de similitude 61
Extension de la notion de nombre de Reynolds. — Lien mathématique entre les écoulements en couches minces et les phénomènes cylindriques 63

Recherches théoriques sur les files et les rues de puits-tourbillons.

But des recherches 65
File de puits-tourbillons unique 65
Rue de puits-tourbillons symétrique 71

Théorie de l'écoulement au voisinage d'un plan portant un obstacle.

Idées générales. 79
Écoulement résultant de la superposition d'un courant uniforme et d'une source placée sur l'obstacle. 81
Comparaison des résultats théoriques avec l'expérience 82

Chapitre VI

SUR LES MANIFESTATIONS DIVERSES DU PHÉNOMÈNE DES ENROULEMENTS DANS LA NATURE ET SUR QUELQUES EFFETS HYDRODYNAMIQUES ET AERODYNAMIQUES

Manifestations diverses du phénomène des enroulements dans la nature 85

Les affouillements en hydraulique. — Piles de pont.

Explication de la formation de l'affouillement.. 87
Évolution de l'affouillement en fonction du temps.. 89
Variation de l'affouillement avec l'épaisseur de sable 92
Moyens d'éviter les affouillements 94

Les obstacles-seuils en hydraulique 95

L'effet résistance.

Considérations générales 97
Ailes d'avion cloisonnées. 98

Interaction aérodynamique. Aile-fuselage 99

INTRODUCTION

L'étude de l'écoulement des fluides au voisinage des points singuliers des obstacles intéresse certainement, de par son caractère général, tous les domaines de la mécanique des fluides. En commençant mes recherches expérimentales (dont je donne ici les résultats d'une première étape) je me suis proposé de résoudre le problème suivant :

Partir d'un écoulement rigoureusement permanent et toujours comparable à lui-même;

Étudier d'une façon détaillée toutes les singularités de cet écoulement au voisinage d'un obstacle;

Déterminer dans quelle mesure les résultats obtenus peuvent être en accord avec les solutions théoriques de l'hydrodynamique classique.

J'ai spécialisé mes recherches en les orientant vers l'étude approfondie de problèmes qui attirèrent particulièrement mon attention :

1° Investigation de l'écoulement au voisinage des points de bifurcation et des points de décollement en recherchant les propriétés caractéristiques;

2° Détermination de la trace de l'écoulement sur les parois (parois d'obstacles ou parois de limite d'écoulement), étude des conditions de l'écoulement dans les dernières pellicules fluides de la couche limite.

Les équations de NAVIER déterminent le mouvement d'un fluide visqueux incompressible :

$$\rho\,\Gamma_x = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\,\Delta\,u,$$

$$\rho\,\Gamma_y = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\,\Delta\,v,$$

$$\rho\,\Gamma_z = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\,\Delta\,w.$$

En mettant à part les solutions particulières données par OSEEN (sphère) et par LAMB (cylindre) on peut traiter deux problèmes distincts :

1° On considère un *écoulement entre glaces parallèles* très rapprochées. L'intégration des équations de NAVIER montre que le mouvement obéit à un potentiel de vitesses (G. Stokes, Rep. of Brit. Ann. 1898) et TOUSSAINT, Comptes Rendus II[e] Congrès Int. Méc. Appl. Zurich 1926). Ce genre d'écoulements, que l'on réalise d'ailleurs très facilement, est basé sur le fait que les forces de viscosité sont prépondérantes et que l'on opère par conséquent avec des *nombres de Reynolds faibles;*

2° On considère un *écoulement cylindrique.* La résolution des équations peut être entreprise avec succès moyennant l'hypothèse de la couche limite de Prandtl (le passage de la vitesse depuis sa valeur dans le fluide libre jusqu'à la valeur zéro conditionnée par

l'adhérence à la paroi se fait dans une couche mince qui subit la pression du fluide libre. A l'extérieur de la couche limite le mouvement s'accomplit avec un frottement interne très réduit, et ressemble par conséquent à celui d'un fluide parfait). Cette deuxième famille de solutions est au contraire basée sur l'hypothèse que *le nombre de Reynolds est grand.*

Dans les deux solutions on suppose d'ailleurs l'existence de l'adhérence du fluide à la paroi, ainsi que la proportionnalité des forces de viscosité au gradient des vitesses.

Les résultats de mes recherches m'ont permis d'établir un pont entre ces deux solutions par la mise en évidence d'une chaîne continue de cas intermédiaires.

Ainsi l'exposé se présente comme suit :

1° *Une partie de réalisation expérimentale* (chapitre I). Il a fallu en premier lieu construire des appareils appropriés à la production des écoulements désirés;

2° *Une partie de recherche expérimentale* (chapitres II, III, IV);

3° *Une partie de recherche théorique* (chapitre V);

4° *Des applications diverses* (chapitre VI).

Le travail se termine par une étude consacrée à quelques cas particuliers intéressants par leurs applications en hydraulique et en aérodynamique.

CHAPITRE PREMIER

APPAREILS ET MONTAGES

GÉNÉRALITÉS

En entreprenant le travail dont je viens de donner les traits généraux, je me suis heurté à la grande difficulté expérimentale : *Réaliser l'écoulement d'un fluide tel que les conditions soient parfaitement précisées et aussi proches que possible des conditions idéales de la théorie mathématique.* Chaque imprécision, chaque irrégularité, risque en effet d'apporter son phénomène particulier et la superposition de ces effets simultanés peut présenter le phénomène global sous un aspect complexe, qui, sans atteindre le caractère incohérent d'une véritable turbulence, peut néanmoins être difficile à démêler. Il en résulte qu'un tel écoulement demeurera plus ou moins inaccessible à l'investigation dans ses détails.C'est le cas du phénomène des enroulements que je vais décrire plus loin. De nombreux chercheurs (1) ont décelé l'existence de tourbillons dits horizontaux en amont d'obstacles variés sans distinguer la nature véritable de ce phénomène absolument général.

Choix du fluide. — J'ai choisi l'eau comme fluide d'expérience.

a) Il est très facile de prendre de l'eau au sein d'une masse plus ou moins grande, dénuée de toute turbulence et de la mettre en mouvement en s'adressant tout simplement à l'action de la pesanteur (loi de Torricelli).

b) Tandis que dans une soufflerie aérodynamique par suite du manque de permanence absolue, il serait très difficile de voir le phénomène et à fortiori d'en montrer les détails, j'ai réussi à matérialiser dans l'eau des filets fluides d'une stabilité remarquable.

Dans certaines expériences l'immobilité de ces filets parfois compliqués (spirales, bifurcations) était si parfaite que l'œil non prévenu était incapable de constater que le fluide était en mouvement.

c) Enfin les courants de convection, d'autant plus importants que la vitesse est plus faible, sont faciles à éviter dans l'eau.

APPAREILS

Les appareils que j'ai projetés et construits sont au nombre de trois par ordre d'importance : *(fig. 1)*

1° *Tunnel hydrodynamique à section variable.* — Cet appareil à écoulement plan permet de réaliser d'une façon continue, grâce au système de section variable, tous les

(1) Voir chapitres II et VI.

écoulements, depuis les écoulements en couches minces (type Stokes) jusqu'à des écoulements de 25 mm d'épaisseur.

2° *Canal d'écoulement à niveau libre.* — Prolongeant les possibilités du tunnel hydrodynamique par la réalisation des écoulements cylindriques.

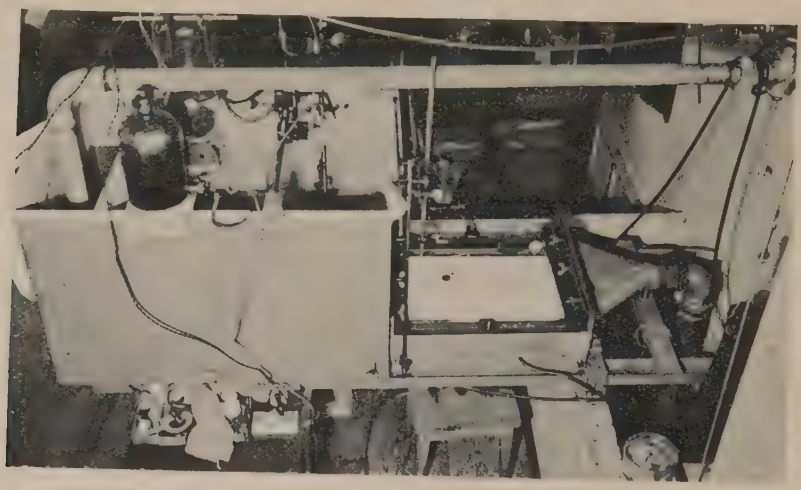


Fig. 1. — A. Tunnel hydrodynamique

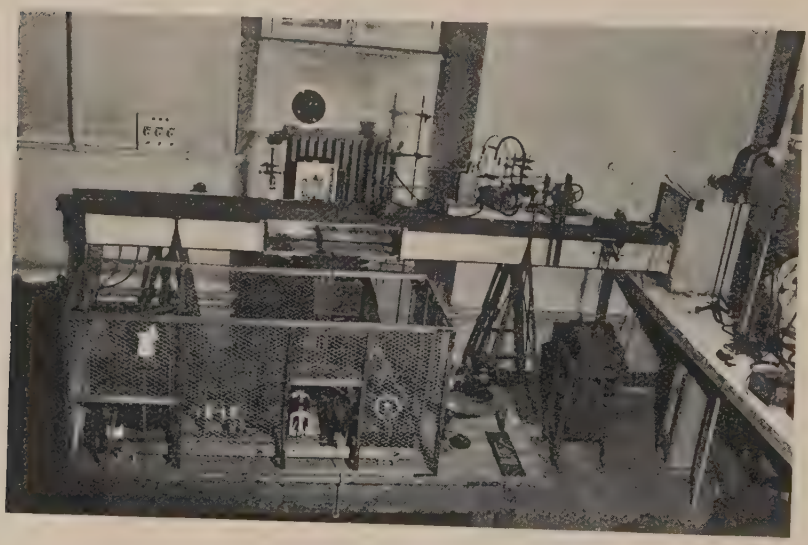


Fig. 1. — B. Canal d'écoulement avec stroborama

3° *Appareil réversible à écoulement en couche très mince.* — Spécialement destiné à l'étude des écoulements du type Stokes (Hele Shaw).

Ces montages se complètent largement, j'ai choisi leurs caractéristiques en ayant les idées directrices suivantes :

a) Prendre du fluide au repos ou animé d'une vitesse très réduite;

b) réaliser des écoulements à section et à vitesse variables;

c) donner à l'observation une importance primordiale : veine d'expérience dégagée du reste de l'appareil, accessible à l'examen direct ou photographique.

Les difficultés résidaient principalement dans les questions d'étanchéité.

Voici les caractéristiques de ces appareils :

	Tunnel hydrod.	Canal à niv. libre	Appareil révers.
Longueur de la veine	650 mm	3 500 mm	220 mm
Largeur de la veine	420 mm	200 mm	117 mm
Hauteur de la veine	1 mm à 25 mm	20 mm à 200 mm	0,1 mm à 2 mm
Vitesse d'écoulement	0 à 150 cm /sec.	0 à 50 cm /sec.	0 à 110 cm /sec.

Le tunnel hydrodynamique à section variable et à alimentation continue.

Cet appareil se compose :

A. *Montage proprement dit* avec : le réservoir d'alimentation continue; la veine d'écoulement; le système de réglage du débit.

B. *Les appareils accessoires*, à savoir : le système d'émission des filets colorés; l'appareil photographique; le système d'éclairage.

Description du montage (voir *fig. 2*).

L'appareil repose sur deux rails horizontaux (X) prenant appui par leurs extrémités sur un support métallique (S) et sur le réservoir d'évacuation de l'eau (E). C'est sur cette base très solide que sont montées les diverses parties de l'appareil.

Le réservoir à alimentation continue (R) d'une contenance de 400 litres comporte dans sa face avant une ouverture rectangulaire (O) destinée au montage extérieur du tunnel d'expérience (T). L'alimentation continue se fait du côté opposé; à cet effet, l'eau arrivant de la conduite d'alimentation (A) suit un trajet forcé à travers un régulateur à déversoirs (D) : deux déversoirs et un déversoir noyé. J'arrive ainsi à amortir les remous de l'eau et à égaliser les vitesses. La hauteur d'eau au-dessus du seuil du dernier déversoir est maintenue telle que la vitesse y reste toujours très faible, de l'ordre du cm /sec.

Étant donné le grand volume d'eau disponible dans le réservoir, on peut considérer l'eau rentrant dans la veine d'expérience comme partant sensiblement du repos (vitesses locales inférieures à 1 mm /sec.).

Quand on met l'appareil en marche il faut attendre quelques minutes pour que le régime de circulation continue s'établisse; on opère évidemment à niveau constant. A partir de ce moment l'appareil pourra fonctionner d'une façon continue.

Aux vitesses lentes, de l'ordre de 10 cm /sec., la permanence de l'écoulement dans le tunnel est pour ainsi dire parfaite comme je l'ai déjà mentionné plus haut. Même pour le débit maximum que peut donner la conduite : 11,5 m^3 /heure, l'écoulement est encore satisfaisant. Remarquons enfin que la température de l'eau reste très constante.

La veine d'expérience (T) est constituée par deux glaces parallèles et horizontales (G) de 7 mm d'épaisseur qui s'engagent partiellement dans le réservoir d'alimentation par l'ouverture rectangulaire (O). La glace supérieure est mobile et démontable.

La glace inférieure est montée à demeure sur un cadre horizontal (B) fixé au réservoir. Son ouverture donne un champ de 420 mm/500 mm. Pour constituer la veine d'écoulement il suffit de mettre deux règles métalliques dressées le long des bords de la glace inférieure et s'engageant également dans le réservoir. On posera alors la glace supérieure. En principe la largeur du tunnel ainsi formé reste constante et égale à 420 mm; sa hauteur est conditionnée par l'épaisseur des règles métalliques. On peut facilement descendre jusqu'à des écartements atteignant 1 mm, et monter jusqu'à 25 mm. La pression

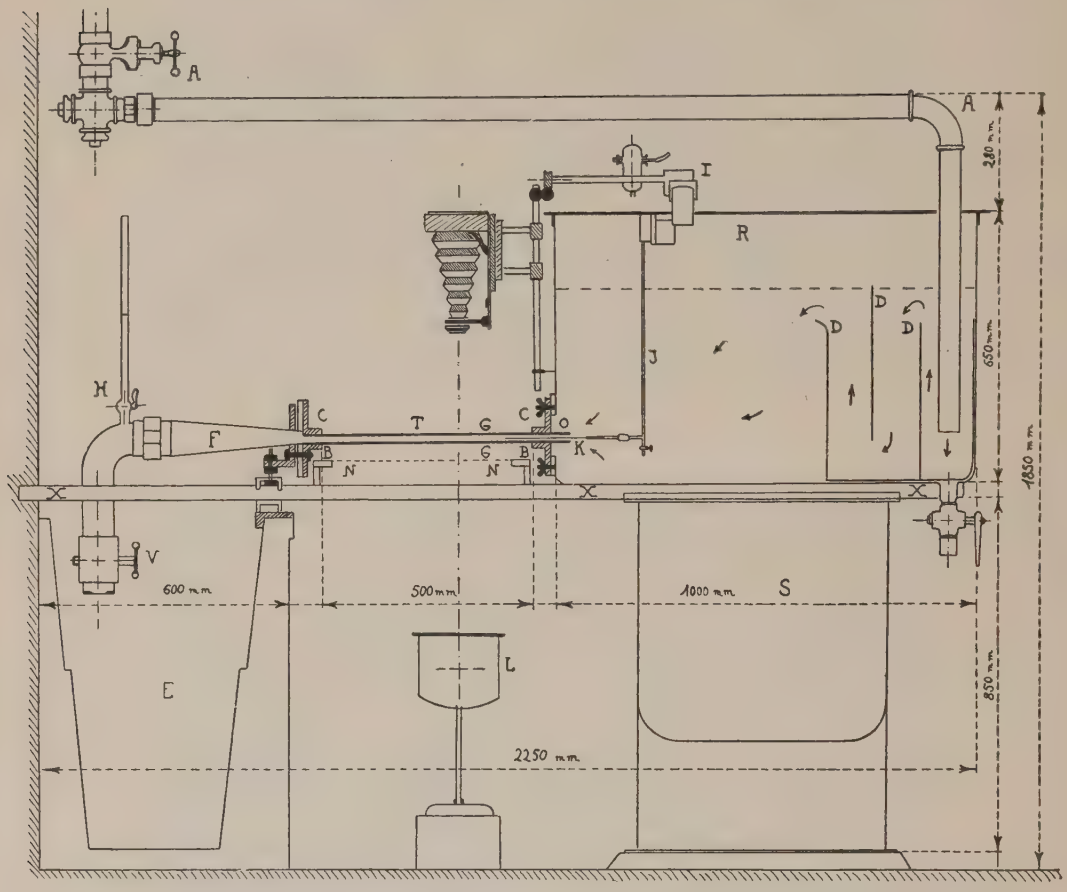


Fig. 2. — Vue du tunnel hydrodynamique (alimentation continue, section variable)

statique de l'appareil rempli d'eau s'exerçant sur les glaces du tunnel (40 grammes par cm²) est équilibrée par des cornières métalliques (C) reposant sur la glace supérieure et convenablement fixées. Les obstacles ordinaires destinés à être étudiés dans la veine sont introduits par son ouverture dans le réservoir d'alimentation. Je reviendrai plus loin sur l'emploi d'obstacles spéciaux. J'avais prévu dans le projet du tunnel hydrodynamique de profiler l'entrée de la veine d'écoulement en la munissant d'un collecteur approprié. Les essais m'ont montré qu'aux vitesses d'utilisation cette précaution était superflue.

Le système de réglage du débit. — A la sortie du tunnel d'expérience se trouve un ajutage convergent (F) destiné à réunir l'eau. Il se termine par une vanne de réglage (V)

à commande directe et déversant l'eau utilisée dans le bassin d'évacuation (E). Cet ajutage comporte une prise de pression (H) servant de cheminée pour l'évacuation de l'air dissous qui se dégage. Le débit est déterminé soit avec le compteur de la conduite d'alimentation, soit avec un réservoir jaugé. Pour avoir un écoulement parfaitement stable dans le tunnel il est indispensable de noyer le jet à la sortie de la vanne de réglage; on évite ainsi les variations de pression et les chocs auxquels le jet libre est très sensible.

Description des accessoires

Le système d'émission des filets colorés se compose du tube capillaire d'émission et d'un chariot permettant les déplacements. Ce chariot (I) est monté sur un axe horizontal au-dessus du réservoir d'alimentation, à la hauteur de l'entrée des glaces du tunnel. La translation de l'axe parallèlement à lui-même et le roulement du chariot sur cet axe permettent des mouvements rapides dans un plan horizontal. En plus le chariot comporte deux mouvements lents rectangulaires : un mouvement parallèle à l'axe de roulement et un mouvement vertical. Ces trois mouvements rectangulaires réalisent donc des déplacements parallèles aux axes de symétrie de la veine.

Le chariot porte l'appareil d'émission ainsi constitué : Un tube vertical (J) métallique de 8 mm de diamètre qui descend jusqu'au niveau de l'entrée des glaces, mais assez en amont pour ne pas perturber le mouvement de l'eau (à 150 mm environ). A l'extrémité inférieure de cette conduite se trouve fixé un tube horizontal orienté parallèlement à l'axe principal de l'écoulement et prolongé par un tube de verre étiré (K) parfaitement cylindrique. Le diamètre extérieur de ce tube est inférieur à 1 mm, sa longueur est d'environ 260 mm. Ce tube capillaire, dont l'extrémité peut être déplacée par le chariot, permet de faire l'émission aux environs immédiats du phénomène à étudier. On conçoit aisément l'avantage énorme de ce montage sur un autre réalisant l'émission en amont de l'entrée du tunnel :

a) J'évite toutes les perturbations éventuelles du filet depuis l'entrée du tunnel jusqu'au phénomène à étudier et surtout l'addition de ces perturbations.

b) J'émets les filets colorés à un endroit de la veine où l'écoulement est uniforme.

c) L'extrémité du tube capillaire se trouvant dans le champ d'observation, je puis régler très facilement la position du filet coloré qui suit instantanément les déplacements du tube capillaire.

d) J'arrive ainsi à émettre le filet en des endroits quelconques et notamment au voisinage des glaces. Grâce aux mouvements du chariot les différents déplacements du filet sont mesurables avec précision (0,5 mm).

e) Remarquons enfin que le tube capillaire bien réglé parallèlement aux filets fluides n'introduit aucune modification décelable de l'écoulement.

Le liquide coloré est filtré plusieurs fois avant son utilisation; pour plus de sécurité un bouchon-filtre est placé dans le tube horizontal avant son étranglement. Un jeu de robinets permet de règler l'émission de ce liquide placé dans un récipient au-dessus du réservoir d'alimentation. Il faut que la pression à la sortie du tube capillaire soit égale à la pression statique de la veine. Le liquide coloré employé est une solution de fuchsine dont la densité est extrêmement voisine de celle de l'eau à la même température; par suite de l'emploi d'un seul filet émis par un tube capillaire, le débit du liquide coloré est très

faible et ce dernier a le temps de prendre rigoureusement la température de l'eau. Ainsi un filet émis, dont j'ai déjà signalé la permanence, reste parallèle à l'axe de l'écoulement pendant tout le trajet entre les glaces.

Observations et prises de vues photographiques. — Le montage optique de l'appareil est extrêmement simple. S'il s'agit d'observer ou de photographier dans le plan horizontal (plan du tunnel), j'éclaire avec une source lumineuse (L) à direction générale verticale, un écran translucide blanc (N) placé entre cette source et le tunnel. De cette manière des filets colorés paraîtront en noir sur fond blanc. Ce dispositif ne permet natu-

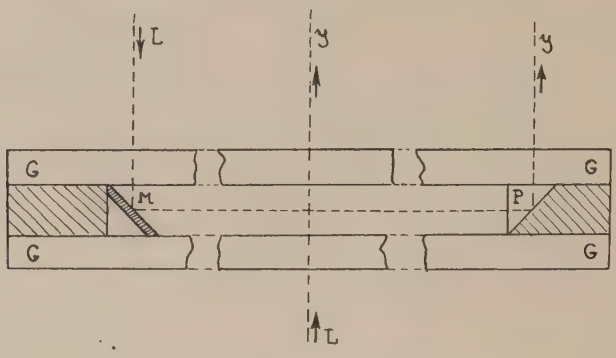


Fig. 3. — Montage optique du tunnel

rellement qu'une seule exposition avec la même plaque photographique. Si je veux réunir plusieurs formes de filets sur le même cliché, j'enlève l'écran blanc et je photographie sur fond noir. Il faudra alors remplacer le filet coloré par un filet blanc, tel qu'un filet de lait ou une substance non miscible avec l'eau et de densité égale (voir plus loin chapitre IV). Il suffira que la lumière transmise directement par la source ne vienne pas frapper l'objectif photographique (éclairage oblique).

Enfin, pour analyser un phénomène dans un plan vertical *(fig. 3)*, j'ai logé dans l'une des règles métalliques fermant la veine d'écoulement un prisme à réflexion totale (P) renvoyant la lumière verticalement. L'éclairage nécessaire est obtenu grâce à un miroir (M) placé de l'autre côté de la veine d'écoulement. Remarquons que dans l'une ou l'autre des façons de procéder, l'axe optique (Y) de l'appareil photographique reste toujours vertical.

Caractéristiques diverses :

Appareil photographique : objectif anastigmat Hermagis (O = f /4,5), obturateur Compur.

Éclairage spécial : lampe type Nitraphot, projecteur Stroborama.

Matériel photographique : plaques Lumichrome.

Le canal d'écoulement à niveau libre.

J'ai construit cet appareil dans le but de produire des écoulements qui se rapprochent sensiblement des phénomènes cylindriques, les qualités du tunnel hydrodynamique étant encore réalisées : écoulement laminaire et permanent, observation facile avec un champ complet.

Comme plus haut, le montage comprend trois parties : *(fig. 4)*

Le réservoir d'alimentation continue;

Le canal d'écoulement avec sa partie transparente;

Le système d'évacuation de l'eau.

L'alimentation se fait par l'intermédiaire d'un réservoir (R) placé en amont du canal. La régularisation y est obtenue avec une série de grilles (U), elle est d'ailleurs continuée dans le début du canal même par deux grilles supplémentaires et un système d'aubes directrices (D). La permanence de l'écoulement continu, sans atteindre celle du tunnel hydrodynamique, est encore très satisfaisante.

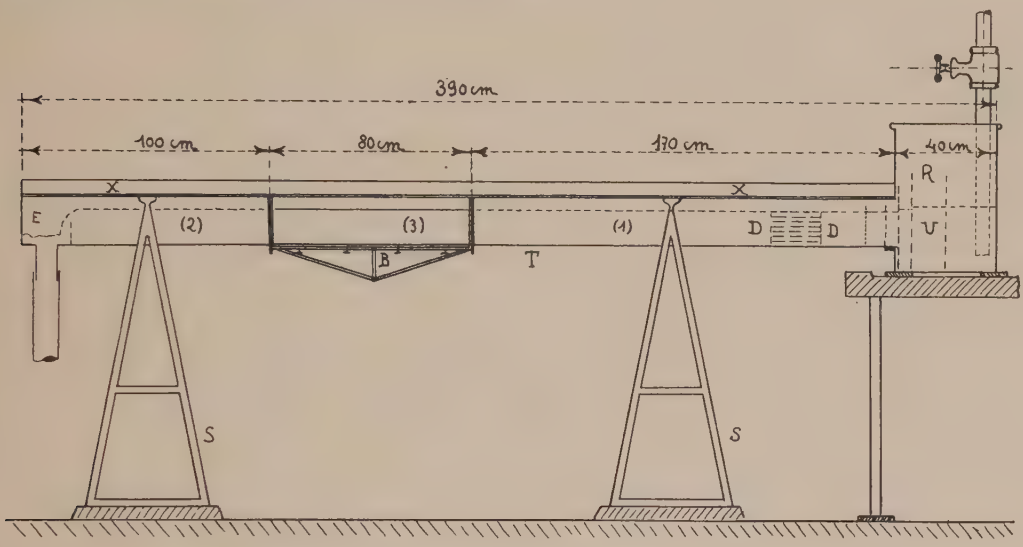


Fig. 4. — Canal d'écoulement à niveau libre

Le canal d'écoulement (T) est de section carrée, 200 mm/200 mm, sa longueur totale est de 3 900 mm. Il se compose de trois parties ajustées, qui sont suspendues l'une à la suite de l'autre à deux rails parallèles horizontaux (X) reposant eux-mêmes sur des supports métalliques (S). La partie amont (1) est reliée au bassin d'alimentation; la partie aval (2) contient le système d'évacuation. La partie centrale (3) intéressante est complètement transparente. Elle est formée d'une carcasse métallique à trois cadres rectangulaires : deux cadres verticaux et un cadre horizontal (B). Une glace rectangulaire reposant sur le cadre horizontal constitue le fond du canal par continuité avec les parties aval et amont. Deux glaces verticales ferment la veine d'écoulement en s'alignant avec les faces des parties amont et aval. L'étanchéité est obtenue avec un ciment spécial.

L'évacuation (E) se fait dans la partie aval par un orifice dans le fond du canal. Le débit est réglé grâce à un déversoir (D) permettant d'obtenir une gamme continue de vitesses d'écoulements. La hauteur d'eau dans le canal peut atteindre 200 mm.

Appareil à écoulement en couches très minces.

Cet appareil a pour but de compléter le tunnel hydrodynamique en vue de l'obtention des écoulements très minces, inférieurs à 1 mm. Il est du type Hele Shaw; je lui ai apporté une série de perfectionnements. Voici comment il est exécuté *(fig. 5)* :

a) Bâti rectangulaire (B) muni d'une ouverture centrale pour l'observation.

b) Deux distributeurs symétriques (D) et (D') fixés aux extrémités du bâti et séparés par une glace (G) soigneusement ajustée. L'ensemble forme une surface rigoureusement plane constituant l'une des parois de l'écoulement. Chaque distributeur muni

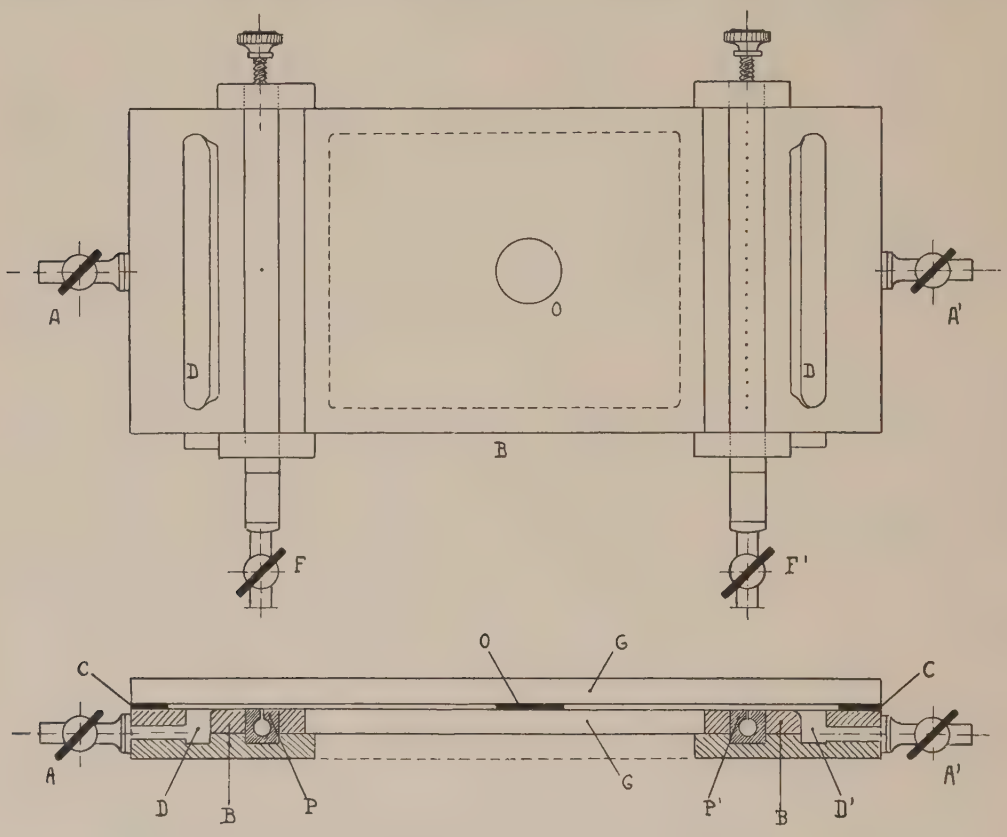


Fig. 5. — Appareil à écoulement en couches minces

d'une rainure transversale communique avec un robinet d'alimentation ou d'évacuation (A) et (A'). Les distributeurs possèdent en outre des peignes d'émission de liquide coloré (P) et (P'), coulissant parallèlement aux rainures par l'action d'une vis de règlage. L'alimentation en liquide coloré se fait par deux robinets (F) et (F').

c) *Couvercle de l'appareil* fermant la veine liquide. Une deuxième glace (G) recouvre exactement la face plane de l'appareil en reposant sur un cadre métallique (C) mince, d'épaisseur voulue. L'obstacle est en O. L'ensemble est rendu étanche par un serrage convenable.

Pour le fonctionnement je m'arrange pour compenser la pression de l'eau à l'arrivée par une dépression créée à la sortie de l'appareil. J'arrive de cette façon à avoir dans l'appareil proprement dit une pression de l'ordre de la pression atmosphérique, ce qui diminue le risque d'éclatement des glaces et simplifie considérablement toutes les questions d'étanchéité.

L'appareil possède le grand avantage d'être reversible : suivant que je veux faire fonctionner le peigne avec la série d'orifices équidistants ou le peigne avec un orifice d'émission unique, je renverse le sens de l'écoulement dans l'appareil; ce qui est rendu possible par la construction symétrique de ce dernier.

CHAPITRE II

ÉTUDE DES POINTS DE BIFURCATION PHÉNOMÈNE DES ENROULEMENTS

Le phénomène des enroulements se présente en amont d'un obstacle cylindrique placé entre glaces parallèles. Je le décrirai tout d'abord dans les conditions où je l'ai découvert et mis en évidence (tunnel hydrodynamique). Je lui consacrerai plus loin une étude théorique (1). Nous verrons également dans un prochain chapitre que c'est un phénomène très général et qu'il peut être comparé à ce point de vue aux rues de tourbillons dans le sillage des obstacles. Il est enfin intimement lié aux questions de décollements et de régimes d'écoulement.

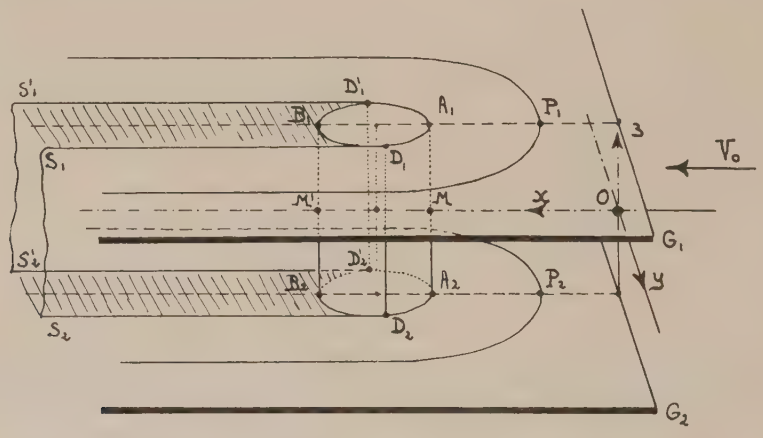


Fig. 6. — Caractéristiques principales d'un écoulement entre glaces parallèles

L'obstacle est un cylindre de révolution, lisse et bien dressé, serré entre les glaces parallèles du tunnel hydrodynamique. Les caractéristiques géométriques et cinématiques sont :

Hauteur du cylindre : 1,02 cm
Diamètre — : 3,— cm
Vitesse d'écoulement : 6,4 cm/sec.

Le montage ainsi réalisé présente deux plans de symétrie *(fig. 6)*.

(1) Chapitre V, Considérations théoriques.

Un plan de symétrie horizontal (H) plan *(ox, oy)* coupant le cylindre suivant une circonférence équidistante des deux bases.

Un plan de symétrie vertical (V) plan *(ox, oz)* coupant le cylindre suivant un rectangle A_1, A_2, B_1, B_2.

Ces deux plans se coupent suivant l'axe de symétrie *ox*.

Je m'attendais à observer un écoulement qui se ferait très sensiblement par couches parallèles, avec bien entendu par suite de l'adhérence du fluide aux parois une légère modification tout près du cylindre. Dans cette hypothèse, à priori vraisemblable, un filet *(f)* émis dans le plan de symétrie vertical (V) rencontrerait la génératrice de front du cylindre, soit A_1, A_2, et bifurquerait pour contourner l'obstacle suivant deux branches horizontales; si le régime d'écoulement était du type Stokes, ces deux branches confluераient vers un point de la génératrice B_1 B_2 aval, si le régime comportait au contraire un sillage, ces deux branches quitteraient le cylindre sur les deux génératrices de décollement D_1 D_2 et D'_1 D'_2. Il en serait de même pour tous les autres filets émis dans le plan V, qui resteraient tous dans leur plan horizontal correspondant. Le mouvement se ferait par couches parallèles glissant les unes sur les autres; la génératrice A_1 A_2 serait une ligne de bifurcation, de même les deux génératrices D_1 D_2 et D'_1 D'_2 seraient les lignes de décollement. Mais l'expérience dément nettement cette hypothèse trop *simple*.

Description de l'écoulement dans le plan de symétrie vertical.

Le filet fluide émis exactement suivant l'axe de symétrie *ox* est véritablement un filet de bifurcation. Il vient heurter l'obstacle en M *(fig. 7)* et *s'y étale en nappe à droite et à gauche, vers le haut et vers le bas*. (Le point M peut être comparé au point de bifurcation sur une sphère par exemple.) Celles des parties du filet qui atteignent les glaces, refluent vers l'amont, contre le courant, et balayent sur elles une *plage* dont l'étendue A_1 P_1 ou A_2 P_2 varie avec la vitesse d'écoulement et avec les dimensions géométriques du montage.

Abaissons légèrement le filet coloré, en restant dans le plan V, le phénomène évolue : en se rapprochant de l'obstacle le filet s'infléchit vers la glace inférieure et remonte le courant pour s'acheminer vers le point P extrémité de la plage précédemment décrite; là, le filet s'étale, descend le courant à droite et à gauche de l'obstacle tout en restant à l'intérieur de la plage. Mais la partie du filet venant au cylindre présente des sinuosités qui sont d'autant plus marquées que ce filet a été émis plus loin du filet de symétrie *x* M. Sur la *fig. 7*, ce type est représenté par la lettre a_1.

Continuons à abaisser le filet coloré : brusquement à partir d'une certaine position, son aspect change totalement; le filet s'enroule au sein même du fluide au voisinage d'un centre O_1 à partir duquel il bifurque pour former deux branches de forme hélicoïdale qui contournent l'obstacle à droite et à gauche sans le toucher et en restant sensiblement dans un plan horizontal. Les photographies de la *fig. 8* représentent cette disposition en plan (H) et en profil (V). Sur la *figure schématique 7* c'est le type de ligne b_1.

Si nous continuons à abaisser le filet, brusquement l'enroulement disparaît et le filet se rapproche de nouveau de la plage comme le faisait le filet a_1; c'est un filet du type a_2 de la *fig. 7*. Il se situe donc en amont de l'enroulement O_1.

Si nous abaissons encore le filet coloré, brusquement celui-ci s'enroule de nouveau, au voisinage d'un centre O_2, en amont de O_1 et qui lui est tout à fait analogue; mais cet

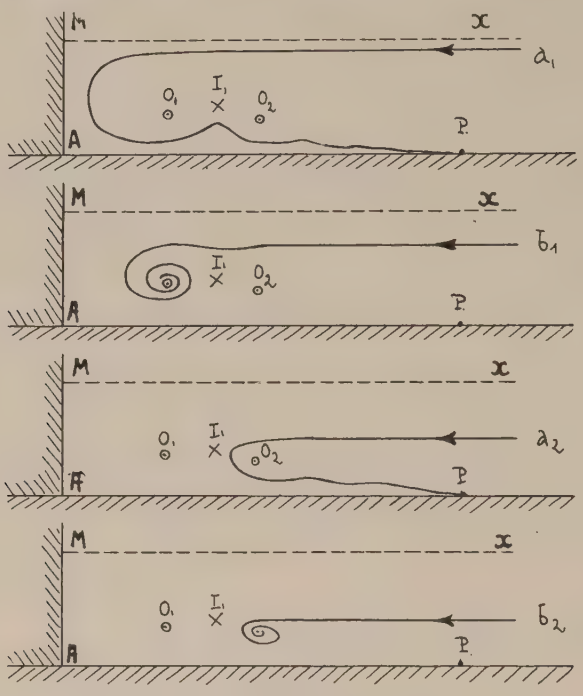


Fig. 7. — Filets de différents types

enroulement a un volume plus réduit et il s'est rapproché de la glace. Sur la *fig. 7* c'est la trajectoire du type b_2.

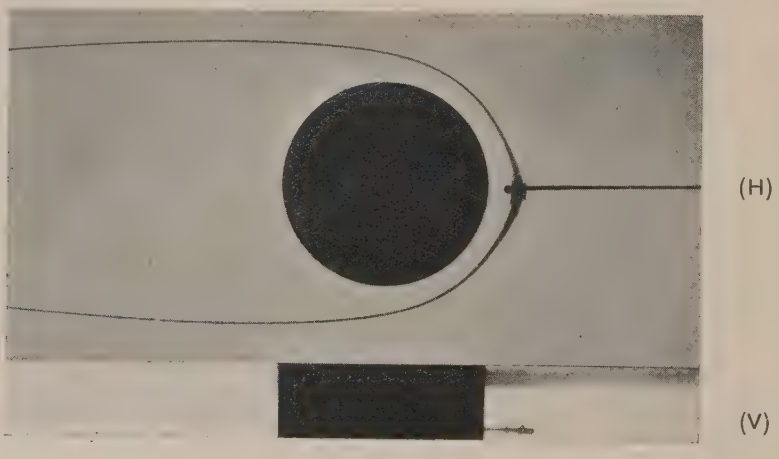


Fig. 8. — Photographies d'un enroulement : 1, plan. 2, profil

Et le phénomène se poursuit au fur et à mesure que l'on déplace le filet pour le rapprocher de la glace. On verra ainsi une série d'enroulements O_1 O_2 O_3..... O_n..... de

plus en plus serrés et qui seront d'autant plus près du point P que leur numéro d'ordre est plus grand.

Naturellement les différentes lignes de courant deviennent rapidement difficiles à mettre en évidence expérimentalement; j'ai réussi néanmoins à matérialiser les quatre premiers enroulements. Mais il y a très vraisemblablement une infinité de centres d'enroulements s'accumulant vers le point P extrémité de la plage. Ils s'alignent approximativement sur le segment O_1 P. Il est à peine besoin de dire qu'une disposition analogue se retrouve par symétrie dans la partie supérieure de l'écoulement.

Il reste encore à analyser ce qui se passe aux endroits de passage brusque d'un type de filet à l'autre. L'étude attentive du phénomène, dont je viens de décrire les traits fondamentaux, permet de déceler un réseau de trajectoires singulières, séparant les différents domaines tourbillonnaires et dont la connexion est d'une élégante complexité.

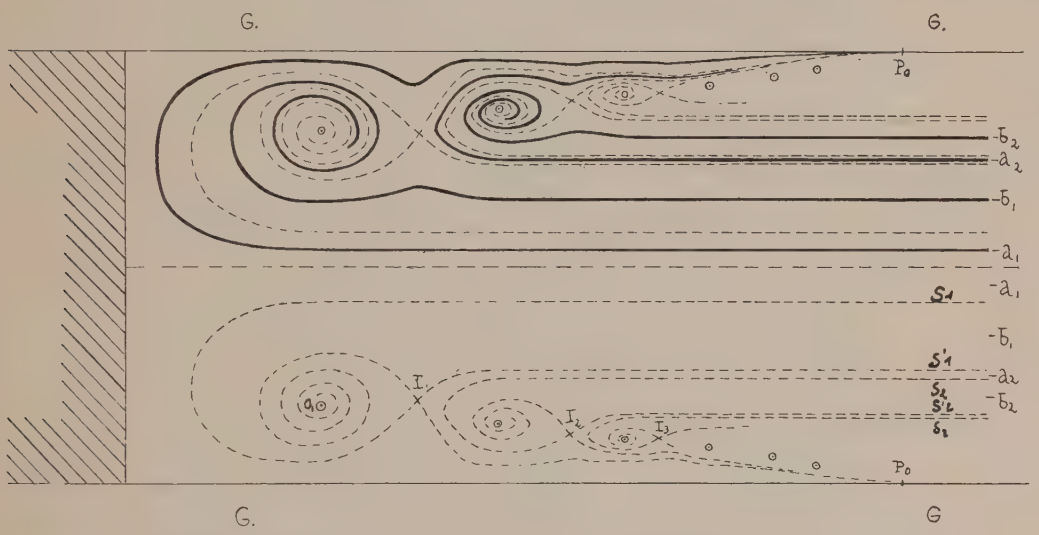


Fig. 9. — Représentation de l'écoulement dans le plan de symétrie vertical

Pour la facile compréhension de ce qui va suivre, consultons la *fig. 9* donnant la représentation schématique de l'ensemble de l'écoulement dans le plan vertical V : dans la partie inférieure figurent des trajectoires singulières; dans la partie supérieure, au contraire, figurent des trajectoires singulières avec quelques lignes de courant. J'ai obtenu ce réseau de lignes par agrandissement de photographies et superposition.

Considérons un filet du type a_1. Si nous le déplaçons d'une façon continue et très lentement, nous arriverons à une position pour laquelle il se scindera en deux branches en un point I_1. L'une des branches continue de s'étaler dans le domaine de la plage, l'autre alimentera l'enroulement O_1. J'appelle lignes singulières, les lignes d'émission présentant ce caractère exceptionnel; ce sont en réalité des lignes de courant à point double (point qui est évidemment de vitesse nulle). Dans l'expérience dont je viens de parler, le filet coloré ayant une certaine épaisseur (de l'ordre 4/10e de mm) a été émis à cheval sur une telle ligne. C'est le filet S_1 de la *fig. 9* tracé en pointillé.

Si nous déplaçons maintenant le filet coloré il quittera cette ligne singulière et deviendra du type b_1, c'est-à-dire alimentera uniquement l'enroulement O_1.

Déplaçons encore le filet, à un moment donné il se partagera de nouveau en deux branches et au même point I_1, mais venant cette fois de la direction opposée. L'une des branches continuera d'alimenter l'enroulement O_1, tandis que l'autre se dirigera de nouveau vers la plage P. Le filet coloré est donc émis suivant une nouvelle ligne singulière S'_1 prolongeant la ligne S_1 au delà du point I_1.

Faisons toujours rapprocher le filet de la glace; il quittera la ligne S'_1 pour devenir du type a_2, c'est-à-dire alimentant simplement la plage.

En le déplaçant encore, le filet se scindera de nouveau en deux branches en un point I_2, situé en amont de I_1 et plus près de la glace. L'une des branches de ce filet continuera à faire partie de la plage, tandis que l'autre commencera à alimenter l'enroulement O_2. Le filet est donc à cheval sur une nouvelle ligne singulière du type S_2.

En continuant les déplacements du filet coloré, celui-ci deviendra d'abord du type b_2, puis nous atteindrons le point I_2 en venant dans l'autre sens et nous aurons, la trajectoire singulière S'_2 prolongement de S_2; et ce processus se répète pour les trajectoires d'indice plus grand.

Nous nous rendons compte, maintenant, de la difficulté de l'investigation d'un écoulement aussi compliqué; dans les conditions de l'expérience décrite plus haut, les dimensions des différents déplacements sont :

Déplacement total depuis le plan médian jusqu'à une glace	5 mm
Déplacement possible du filet type a_1	0,8 mm
— — — a_2	0,2 mm
— — — a_3	0,1 mm
Déplacement possible du filet type b_1	1,5 mm
— — — b_2	0,8 mm
— — — b_3	0,3 mm
Distances des enroulements successifs	4 mm, 3 mm, 2 mm
Dimension de la plage.	A P = 18 mm.

La *fig. 10* contient une série de photographies de filets colorés participant aux différentes phases du phénomène des enroulements et qui ont été prises grâce au système optique du tunnel.

Photographies (1) et (2). — Filets du type a_1, le premier étant émis très près de l'axe de symétrie xM, le second en étant plus écarté et présentant des sinuosités très marquées.

Photographie (3). — Filet du type S_1, bifurcation en I_1.

Photographie (4). — Filet du type b_1, enroulement en O_1.

Photographie (5). — Filet du type S'_1, bifurcation en I_1.

Photographie (6). — Filet du type S'_1 S_2, le filet assez gros atteignant 4/10 mm est mis à cheval sur les deux lignes singulières S'_1 S_2 et matérialise par conséquent les deux enroulements O_1 et O_2 tout en alimentant également la plage.

Photographie (7). — Filet du type S_2, bifurcation en I_2.

Photographie (8). — Filet du type b_2, enroulement en O_2.

C'est l'agrandissement de ces photographies (rapport 10/1) qui m'a permis de constituer par superpositions successives le tableau schématique de la *figure 9.*

Comme conclusion à la description du phénomène dans le plan vertical nous arrivons donc à ce résultat remarquable que, dès l'entrée des glaces du tunnel *le fluide est en quelque sorte stratifié.*

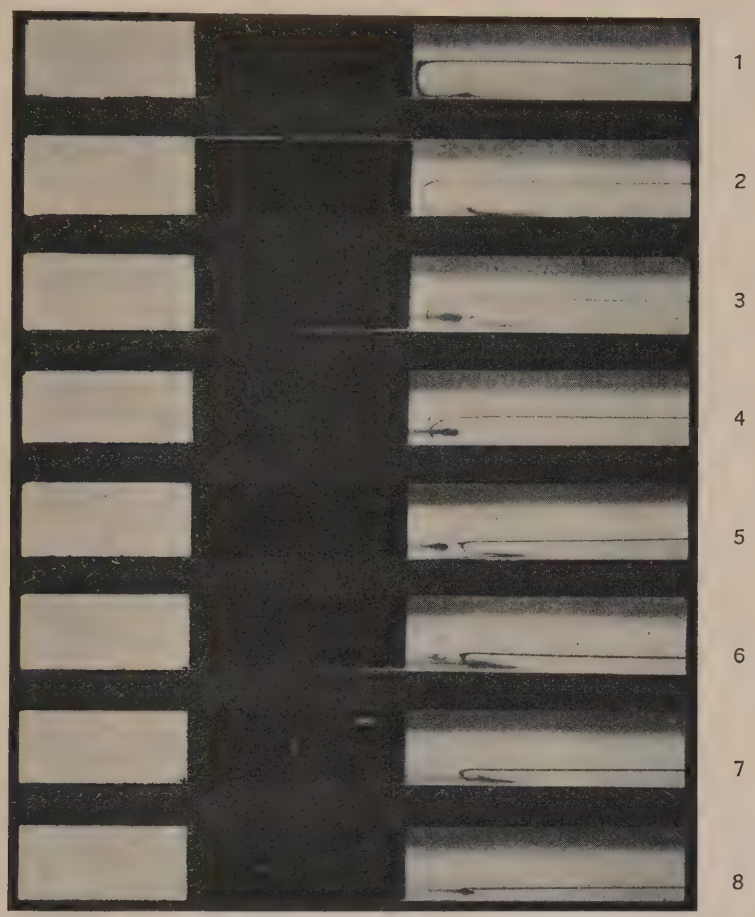


Fig. 10. — Photographies des filets types

Domaines déterminés par les lignes singulières

Les branches singulières *ox*, S_1, S'_1, S_2, S'_2, S_3, S'_3, etc..., séparent le fluide en couches successives en formant des domaines contenant un enroulement, ou rejoignant la plage comme l'indique le tableau qui suit :

xM — S_1	alimentant la plage,	
S_1 — S'_1	contenant l'enroulement O_1,	I_1 sur S_1 S'_1,
S'_1 — S_2	rejoignant le point P,	
S_2 — S'_2	contenant l'enroulement O_2,	I_2 sur S_2 S'_2,
S'_2 — S_3	rejoignant le point P,	
S_3 — S'_3	contenant l'enroulement O_3,	I_3 sur S_3 S'_3. etc.

Les particules fluides appartenant aux différentes couches prennent donc part à un enroulement, si elles sont dans un domaine $S_n\,S'_n$, elles rejoignent au contraire la plage au voisinage du point P en suivant une trajectoire sinueuse, si elles se trouvent dans un domaine $S'_n\,S_{n+1}$.

Remarquons aussi que deux particules très voisines, de part et d'autre d'une ligne singulière, sont destinées par la suite à se séparer totalement et à suivre des trajectoires complètement différentes, et qu'au contraire deux particules éloignées, mais prises dans une même couche, peuvent très bien, après s'être rencontrées près d'un point

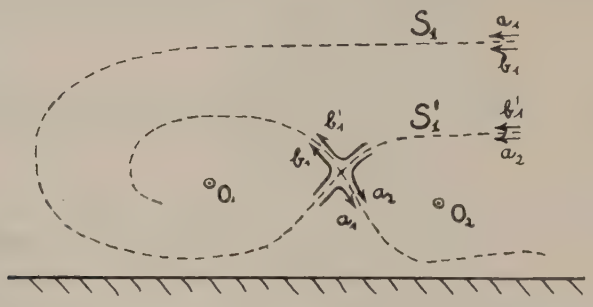


Fig. 11. — Écoulement au voisinage d'un point de vitesse réelle

de vitesse nulle, s'accompagner de très près par la suite. En effet, considérons la *fig. 11 :* le point I_1 est la rencontre des lignes singulières S_1 et S'_1, et le départ de deux branches singulières dont l'une s'enroule en O_1 et dont l'autre s'en va rejoindre l'extrémité de la plage. (Point de vitesse nulle à quatre branches singulières deux branches *affluentes* et deux branches *refluentes*).

Prenons deux molécules voisines et situées de part et d'autre de la ligne singulière S_1, soit a_1 et b_1 (loin de l'obstacle). Étant donné que leur distance pourra être aussi petite que l'on voudra, elles possèdent des propriétés rigoureusement identiques (pression et vitesse). Elles ont pourtant deux destinées complètement distinctes. Elles se suivront jusqu'au point I_1 et s'y sépareront suivant les directions a_1 et b_1, l'une donnant un enroulement, l'autre s'en allant vers la plage.

Prenons maintenant les deux molécules émises en b_1 et b'_1, leurs propriétés sont au contraire différentes. Elles se rencontreront pourtant au point I_1 et chemineront par la suite parallèlement suivant les directions b_1 et b'_1, pour s'enrouler au voisinage du centre O_1.

Description de l'écoulement dans l'espace.

L'étude complète du phénomène des enroulements, c'est-à-dire le prolongement dans l'espace des lignes singulières que j'ai trouvées dans le plan de symétrie vertical, est très difficile à entreprendre et beaucoup plus complexe que ce que nous venons de voir. Il se passe d'ailleurs certains phénomènes dans le sillage qui sont intimement liés à ce qui se passe en amont d'un tel obstacle. Aussi me contenterai-je de citer les traits les plus importants (consulter à cet effet la *fig. 12*).

Les enroulements

Soit un filet dans le plan de symétrie vertical et alimentant un enroulement (filet *b*, par exemple, donnant l'enroulement en O_1). Écartons légèrement ce filet du plan V : il s'enroule encore en se rapprochant de l'obstacle, mais il ne reste plus dans un plan et on

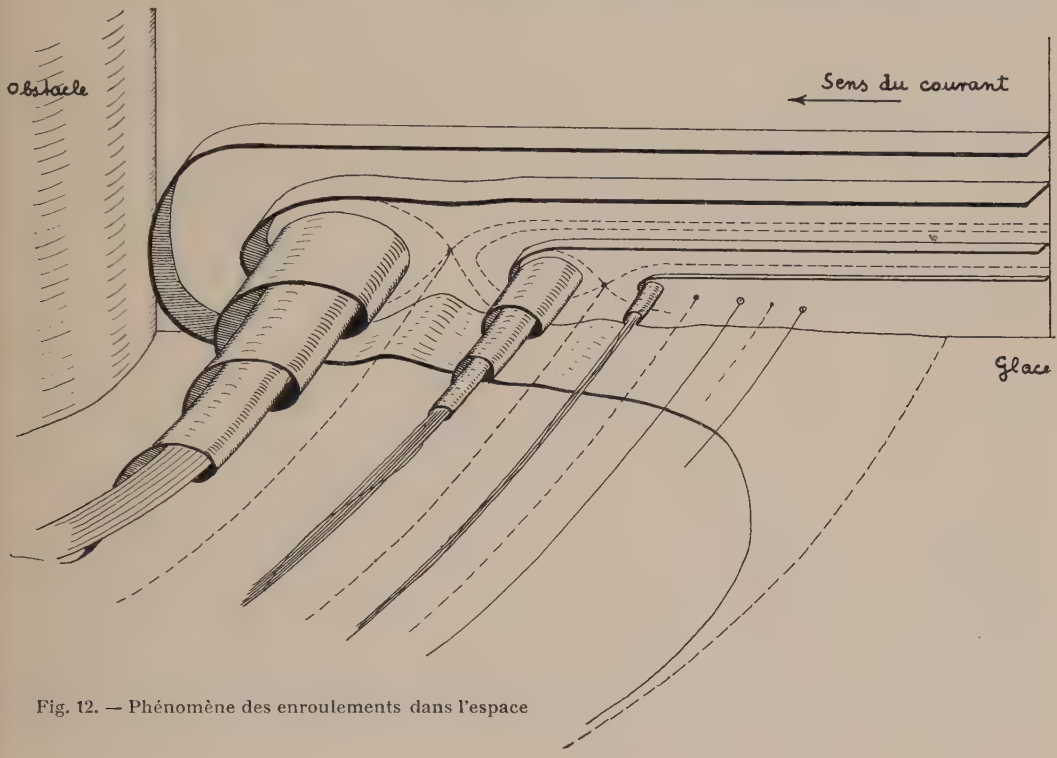


Fig. 12. — Phénomène des enroulements dans l'espace

peut alors voir très nettement la nature et la forme de l'enroulement. La photographie de la *fig. 13* représente un tel filet. J'ai photographié sur fond noir un train de goutte-

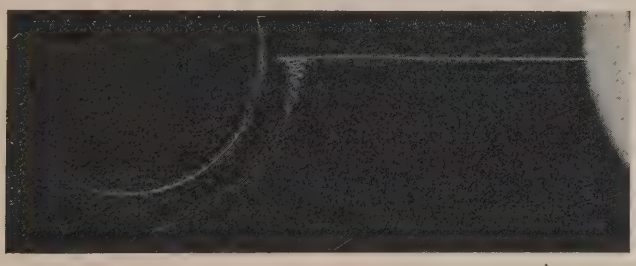


Fig. 13. — Photographie d'un enroulement

lettes très petites d'une substance de densité égale à celle de l'eau et convenablement éclairées. (Voir plus loin chapitre IV.) On distingue nettement la forme hélicoïdale du filet, le pas allant en augmentant et le diamètre en diminuant. (On remarque également le bord antérieur de l'obstacle qui se détache par diffraction).

Si nous écartons encore le filet du plan vertical, sa forme devient de plus en plus plane et on se trouve dans l'incapacité de dire à quel moment précis il ne participe plus à l'enroulement.

Les deux branches de l'enroulement contournent donc le cylindre et escortent le sillage tout en restant parfaitement permanentes.

Les plages

Leur étude présente un intérêt tout particulier par leur ampleur ainsi que par les propriétés mécaniques de leurs filets. Nous savons que ces plages sont formées en réalité par des filets fluides remontant le courant et provenant des régions centrales de l'écoulement (Domaine xM S_1 et domaine symétrique). Ces filets y produisent un balayage parfait de la glace, bien plus accentué que dans le reste de la paroi. Une poudre fine projetée sur la glace est instantanément enlevée à l'intérieur de la plage tandis qu'elle ne bouge guère en dehors d'elle. (J'y reviendrai dans le chapitre VI).

Enfin, un dernier point intéressant à élucider est la nature de l'écoulement dans les plages au voisinage immédiat de la paroi. La forme des filets fluides étant donnée, il semblerait qu'au fur et à mesure que l'on s'approcherait de la paroi, il n'y aurait d'autre effet que celui du gradient des vitesses causé par l'adhérence du fluide. La méthode de l'iode (voir chapitre suivant) m'a fourni au contraire la preuve négative : la complexité du phénomène ne s'arrête pas là; en essayant d'obtenir la trace de l'écoulement par une modification de la couleur de la paroi, je m'attendais à voir des zones plus ou moins estompées correspondant aux variations de la vitesse moyenne du fluide alimentant la plage. Or, j'ai obtenu au contraire une famille de zones concentriques très régulières et très nettement limitées *(fig. 44)*. Il est donc permis de conclure que le gradient des vitesses dans les dernières pellicules fluides de la couche limite obéit à des lois subissant des variations plus ou moins fortes aux passages d'une zone concentrique à l'autre. Des nouvelles expériences pour étudier complètement ce problème sont en cours.

J'ajoute pour terminer la description du phénomène des enroulements que je n'ai pu entreprendre cette étude que grâce à la régularité de l'écoulement et de l'émission des filets d'exploration, et que le fait d'avoir réussi à débrouiller un phénomène si complexe est une garantie sérieuse de cette régularité.

Évolution du phénomène des enroulements.

On peut considérer ce phénomène comme étant une fonction des paramètres suivants :

Vitesse d'écoulement V;
Diamètre de l'obstacle d;
Écartement des glaces h;
Coefficient de viscosité cinématique ν.

Le montage tel que je l'ai effectué ne m'a pas permis de faire varier ce dernier paramètre (par changement de la température de l'eau ou en remplaçant l'eau par un autre fluide d'expérience). Nous supposerons donc le coefficient de viscosité constant, nous avons vu en effet dans le chapitre premier que la température de l'eau d'alimentation reste constante au cours d'une expérience.

La description que je viens de faire dans les pages précédentes est relative à des valeurs bien déterminées de la vitesse de l'écoulement, du diamètre de l'obstacle, de l'écartement des glaces. On peut se demander comment le phénomène des enroulements évoluera en fonction de ces paramètres.

Quelle est l'influence de la vitesse et du diamètre?

Que devient le phénomène dans les écoulements en couches minces?

Quel est l'effet des très grands écartements?

Pour répondre à ces questions j'ai effectué des mesures systématiques en faisant varier la vitesse de l'écoulement et en opérant avec les données suivantes :

1° *diamètre des obstacles* allant de 0,10 cm à 4 cm, à savoir :
0,10, 0,25, 0,50, 1, 2, 3, 4 cm;

2° *écartement des glaces* entre 0,06 cm jusqu'à 15 cm répartis comme suit pour les différents appareils :

Appareil réversible	*Tunnel hydrodynamique*	*Canal*
0,06, 0,11 cm	0,27, 0,51, 1,02, 2,05 cm	5, 10, 15 cm

Les expériences ont porté sur les deux points suivants :

a) *Les plages.* — Je caractérise dans mes mesures l'ampleur du phénomène des enroulements par la distance y séparant le sommet P de la plage du pied de l'obstacle. Pour matérialiser cette plage je peux produire indifféremment des filets émis dans le plan de symétrie vertical de façon à dessiner cette plage, ou des filets émis très loin, en amont du cylindre et tout près d'une glace; le filet s'étalera dans ce second cas en contournant extérieurement la frontière de la plage. J'ai vérifié que ces deux procédés fournissent exactement les mêmes valeurs de la fonction y.

b) *Les enroulements.* — C'est le premier enroulement de la série qui est le plus facile à mettre en évidence. Il suffit pour cela de suivre sa trace dans le plan de symétrie vertical (prisme à réflexion totale).

J'ai étudié les variations de ces deux éléments en fonction des trois paramètres du problème, les tableaux numériques qui suivent condensent l'ensemble des mesures effectuées avec un viseur à micromètre. En ce qui concerne les déplacements du premier enroulement, j'ai complété les mesures directes par l'analyse de clichés photographiques.

Les tableaux numériques qui suivent contiennent :

1° Les valeurs mesurées de la quantité y.

2° Les valeurs calculées y/d, Vd et Vh^2/d (dont nous aurons besoin plus loin).

Variations des plages.

Tableau numérique A

Écartement des glaces : $h = 2{,}05$ cm. Température : $12° \pm 0°{,}5$. Signe des courbes : —●—

Vitesse moyenne cm/sec		$d = 4{,}00$ $h/d = 1/2$		$d = 3{,}00$ $h/d = 2/3$		$d = 2{,}00$ $h/d = 1$		$d = 1{,}00$ $h/d = 2$		$d = 0{,}50$ $h/d = 4$	
0,25	y et y/d	0,75	0,19	0,61	0,20	0,45	0,22	0,35	0,35	0,23	0,46
	Vd et Vh^2/d	1,—	0,26	0,75	0,35	0,50	0,52	0,25	1,05	0,12	2,10
0,40	y et y/d	1,0	0,25	0,82	0,27	0,60	0,30	0,40	0,40	0,29	0,58
	Vd et Vh^2/d	1,6	0,42	1,20	0,56	0,80	0,84	0,40	1,68	0,20	3,35
1,00	y et y/d	1,50	0,37	1,32	0,44	1,00	0,50	0,65	0,65	0,40	0,80
	Vd et Vh^2/d	4,—	1,05	3,—	1,40	2,—	2,10	1,—	4,20	0,50	8,40
2,40	y et y/d	2,30	0,57	1,80	0,60	1,40	0,70	0,85	0,85	0,45	0,90
	Vd et Vh^2/d	9,6	2,52	7,20	3,36	4,80	5,04	2,40	10,08	1,20	20,15
3,10	y et y/d	2,30	0,57	1,90	0,63	1,45	0,72	0,88	0,88	0,48	0,96
	Vd et Vh^2/d	12,4	3,25	9,3	4,33	6,20	6,50	3,10	13,—	1,55	26,—
5,80	y et y/d	2,70	0,67	2,15	0,71	1,70	0,85	1,—	1,—	0,50	1,—
	Vd et Vh^2/d	23,2	6,10	17,4	8,13	11,6	12,20	5,80	24,40	2,90	48,80
7,50	y et y/d	2,85	0,71	2,25	0,75	1,75	0,88	1,—	1,—	0,52	1,05
	Vd et Vh^2/d	30,—	7,87	22,5	10,50	15,—	15,75	7,50	31,50	3,75	63,—
9,20	y et y/d	2,90	0,73	2,30	0,77	1,80	0,90	1,05	1,05	0,55	1,10
	Vd et Vh^2/d	36,8	9,65	27,6	12,80	18,4	19,30	9,20	38,60	4,60	77,20
10,7	y et y/d	3,—	0,75	2,35	0,78	1,90	0,95	1,10	1,10	0,58	1,15
	Vd et Vh^2/d	42,8	11,22	32,1	14,90	21,4	22,45	10,7	44,90	5,35	89,80
11,6	y et y/d	3,05	0,75	2,38	0,79	1,90	0,95	1,12	1,12	0,56	1,12
	Vd et Vh^2/d	46,4	12,20	34,8	16,20	23,2	24,35	11,6	48,70	5,80	97,40
15,—	y et y/d	3,20	0,80	2,40	0,80	1,92	0,96	1,15	1,15	0,59	1,18
	Vd et Vh^2/d	60,—	15,70	45,—	21,—	30,—	31,50	15,—	63,—	7,50	126,
18,—	y et y/d	3,20	0,80	2,45	0,82	1,95	0,98	1,18	1,18	0,60	1,20
	Vd et Vh^2/d	72,—	18,90	54,—	25,20	36,—	37,80	18,—	75,60	9,—	151,

Variations des plages.

TABLEAU NUMÉRIQUE B

Écartement des glaces : $h = 1{,}02$ cm. Température : $12^{o} \pm 0^{o},5$. Signe des courbes : —X—

Vitesse moyenne cm/sec		$d = 4{,}00$ $h/d = 1/4$		$d = 3{,}00$ $h/d = 1/3$		$d = 2{,}00$ $h/d = 1/2$		$d = 1{,}00$ $h/d = 1$		$d = 0{,}50$ $h/d = 2$	
0,80	y et y/d	0,75	0,19	0,72	0,24	0,50	0,25	0,35	0,35	0,25	0,50
	Vd et Vh^2/d	3,20	0,20	2,40	0,27	1,60	0,41	0,80	0,83	0,40	1,66
1,62	y et y/d	1,10	0,27	0,95	0,32	0,77	0,38	0,50	0,50	0,34	0,68
	Vd et Vh^2/d	6,48	0,42	4,86	0,56	3,24	0,84	1,62	1,68	0,81	3,36
2,30	y et y/d	1,33	0,33	1,15	0,38	0,90	0,45	0,55	0,55	0,35	0,70
	Vd et Vh^2/d	9,20	0,60	6,90	0,79	4,60	1,20	2,30	2,39	1,15	4,78
3,40	y et y/d	1,60	0,40	1,35	0,45	1,02	0,51	0,65	0,65	0,40	0,80
	Vd et Vh^2/d	13,60	0,88	10,20	1,17	6,80	1,76	3,40	3,53	1,70	7,06
4,20	y et y/d	1,70	0,42	1,50	0,50	1,15	0,58	0,70	0,70	0,42	0,84
	Vd et Vh^2/d	16,80	1,09	12,60	1,45	8,40	2,18	4,20	4,37	2,10	8,74
5,30	y et y/d	1,88	0,47	1,70	0,57	1,25	0,62	0,75	0,75	0,45	0,90
	Vd et Vh^2/d	21,20	1,37	15,90	1,83	10,60	2,75	5,30	5,51	2,65	11,—
7,—	y et y/d	2,—	0,50	1,75	0,58	1,36	0,68	0,85	0,85	0,47	0,94
	Vd et Vh^2/d	28,—	1,82	21,—	2,42	14,—	3,64	7,—	7,28	3,50	14,60
7,70	y et y/d	2,10	0,52	1,75	0,58	1,40	0,70	0,85	0,85	0,47	0,94
	Vd et Vh^2/d	30,80	2,—	23,10	2,66	15,40	4,—	7,70	8,—	3,85	16,—
9,40	y et y/d	2,20	0,55	1,90	0,63	1,45	0,72	0,88	0,88	0,50	1,—
	Vd et Vh^2/d	37,60	2,44	28,20	3,25	18,80	4,88	9,40	9,77	4,70	19,50
14,—	y et y/d	2,40	0,60	2,10	0,70	1,50	0,75	0,95	0,95	0,52	1,04
	Vd et Vh^2/d	56,—	3,65	42,—	4,86	28,—	7,30	14,—	14,60	7,—	29,20
17,5	y et y/d	2,50	0,62	2,05	0,68	1,60	0,80	1,—	1,—	0,55	1,10
	Vd et Vh^2/d	70,—	4,55	52,5	6,06	35,—	9,10	17,5	18,20	8,75	36,40
20,—	y et y/d	2,56	0,64	2,10	0,70	1,70	0,85	1,00	1,00	0,55	1,10
	Vd et Vh^2/d	80,—	5,20	60,—	6,93	40,—	10,40	20,—	20,80	10,—	41,60

Variations des plages.

TABLEAU NUMÉRIQUE C

Écartement des glaces : $h = 0{,}51$ cm. Température : $12° \pm 0°{,}5$. Signe des courbes : —□—

Vitesse moyenne cm/sec		$d = 3{,}00$ $h/d = 1/6$		$d = 2{,}00$ $h/d = 1/4$		$d = 1{,}00$ $h/d = 1/2$		$d = 0{,}50$ $h/d = 1$		$d = 0{,}25$ $h/d = 2$	
1,60	y et y/d	0,30	0,10	0,25	0,12	0,22	0,22	0,16	0,32	0,095	0,38
	Vd et Vh^2/d	4,8	0,13	3,20	0,20	1,60	0,41	0,80	0,82	0,40	1,64
1,86	y et y/d	0,38	0,13	0,30	0,15	0,26	0,26	0,17	0,34	0,12	0,48
	Vd et Vh^2/d	5,58	0,16	3,72	0,24	1,86	0,48	0,93	0,96	0,46	1,92
4,12	y et y/d	0,64	0,21	0,51	0,25	0,37	0,37	0,25	0,50	0,18	0,72
	Vd et Vh^2/d	12,36	0,35	8,24	0,53	4,12	1,07	2,06	2,14	1,03	4,28
5,50	y et y/d	0,68	0,23	0,60	0,30	0,44	0,44	0,30	0,60	0,185	0,72
	Vd et Vh^2/d	16,5	0,47	11,—	0,71	5,50	1,43	2,75	2,86	1,37	5,72
7,10	y et y/d	0,72	0,24	0,62	0,31	0,50	0,50	0,31	0,62	0,195	0,87
	Vd et Vh^2/d	21,3	0,62	14,20	0,92	7,10	1,85	3,55	3,70	1,80	7,40
7,50	y et y/d	0,90	0,30	0,72	0,36	0,53	0,53	0,32	0,64	0,21	0,84
	Vd et Vh^2/d	22,5	0,65	15,—	0,97	7,50	1,95	3,75	3,90	1,87	7,80
10,9	y et y/d	1,10	0,37	0,80	0,40	0,58	0,58	0,38	0,76	0,22	0,88
	Vd et Vh^2/d	32,7	0,94	21,8	1,41	10,9	2,83	5,45	5,66	2,72	11,30
13,6	y et y/d	1,20	0,40	1,—	0,50	0,66	0,66	0,40	0,80	0,23	0,92
	Vd et Vh^2/d	40,8	1,17	27,2	1,76	13,6	3,53	6,80	7,06	3,40	14,10
20,—	y et y/d	1,38	0,46	1,04	0,52	0,78	0,78	0,45	0,90	0,25	1,—
	Vd et Vh^2/d	60,—	1,73	40,—	2,60	20,—	5,20	10,—	10,40	5,—	20,80
24,—	y et y/d	1,50	0,50	1,14	0,57	0,78	0,78	0,47	0,94	0,25	1,—
	Vd et Vh^2/d	72,—	2,08	48,—	3,12	24,—	6,24	12,—	12,50	6,—	25,—
28,5	y et y/d	1,60	0,53	1,20	0,60	0,82	0,82	0,48	0,96	0,26	1,04
	Vd et Vh^2/d	85,5	2,80	57,—	3,70	28,5	7,41	14,25	14,80	7,1	29,60
37,5	y et y/d	1,70	0,57	1,40	0,70	0,85	0,85	0,50	1,—	0,28	1,12
	Vd et Vh^2/d	112,5	3,25	75,—	4,87	37,5	9,75	18,75	19,50	9,4	39,—

Variations des plages.

TABLEAU NUMÉRIQUE D

Écartement des glaces : $h = 0{,}27$ cm. Température : $12° \pm 0°{,}5$. Signe des courbes : —O—

Vitesse moyenne cm/sec		$d = 2{,}00$ $h/d = 1/8$		$d = 1{,}00$ $h/d = 1/4$		$d = 0{,}50$ $h/d = 1/2$		$d = 0{,}25$ $h/d = 1$		$d = 0{,}10$ $h/d = 3$	
2,60	y et y/d	0,12	0,06	0,09	0,09	0,08	0,16	0,07	0,28	0,045	0,45
	Vd et Vh^2/d	5,20	0,09	2,60	0,19	1,30	0,38	0,65	0,76	0,26	1,9
4,—	y et y/d	0,18	0,09	0,14	0,14	0,11	0,22	0,10	0,40	0,055	0,55
	Vd et Vh^2/d	8,—	0,14	4,—	0,29	2,—	0,58	1,—	1,16	0,40	2,9
6,20	y et y/d	0,25	0,12	0,20	0,20	0,15	0,30	0,11	0,44	0,06	0,60
	Vd et Vh^2/d	12,4	0,22	6,20	0,45	3,10	0,90	1,55	1,80	0,62	4,5
7,80	y et y/d	0,33	0,16	0,255	0,255	0,20	0,40	0,13	0,52	0,07	0,70
	Vd et Vh^2/d	15,6	0,28	7,80	0,57	3,90	1,14	1,85	2,28	0,78	5,7
9.60	y et y/d	0,40	0,20	0,305	0,305	0,22	0,44	0,14	0,56	0,08	0,80
	Vd et Vh^2/d	19,2	0,35	9,60	0,70	4,80	1,40	2,40	2,80	0,96	7,—
12,—	y et y/d	0,47	0,23	0,34	0,34	0,24	0,48	0,16	0,64	0,085	0,85
	Vd et Vh^2/d	24,—	0,43	12,—	0,87	6,—	1,74	3,—	3,50	1,20	8,7
13,2	y et y/d	0,50	0,25	0,37	0,37	0,26	0,52	0,16	0,64	0,085	0,85
	Vd et Vh^2/d	26,4	0,48	13,2	0,96	6,60	1,92	3,30	3,85	1,32	9,6
14,9	y et y/d	0,53	0,26	0,38	0,38	0,28	0,56	0,17	0,68	0,085	0,85
	Vd et Vh^2/d	29,8	0,54	14,9	1,09	7,45	2,18	3,72	4,35	1,49	10,9
20,1	y et y/d	0,62	0,31	0,42	0,42	0,30	0,60	0,19	0,76	0,09	0,90
	Vd et Vh^2/d	40,2	0,73	20,1	1,47	10,05	2,94	5,02	5,87	2,01	14,7
23,5	y et y/d	0,65	0,32	0,455	0,455	0,32	0,64	0,20	0,80	0,09	0,90
	Vd et Vh^2/d	47,—	0,85	23,5	1,71	11,75	3,42	5,87	6,86	2,35	17,1
32,—	y et y/d	0,75	0,37	0,535	0,535	0,37	0,74	0,205	0,82	0,095	0,95
	Vd et Vh^2/d	64,—	1,17	32,—	2,34	16,—	4,68	8,—	9,34	3,20	23,4
36,—	y et y/d	0,80	0,40	0,58	0,58	0,36	0,72	0,23	0,92	0,10	1,—
	Vd et Vh^2/d	72,—	1,31	36,—	2,63	18,—	5,26	9,—	10,50	3,60	26,3

Variations des plages.

Tableau numérique E

Écartement des glaces : $h = 0{,}11$ cm. Température : $12° \pm 0°{,}5$. Signe des courbes : —△—

Vitesse moyenne cm/sec		$d = 2{,}00$ $h/d = 1/18$		$d = 1{,}00$ $h/d = 1/9$		$d = 0{,}50$ $h/d = 1/5$		$d = 0{,}25$ $h/d = 10/25$		$d = 0{,}10$ $h/d = 1$	
4,90	y et y/d	0,035	0,017	0,03	0,03	0,03	0,06	0,03	0,12	0,02	0,20
	Vd et Vh^2/d	9,80	0,03	4,90	0,06	2,45	0,12	1,22	0,24	0,49	0,59
5,60	y et y/d	0,045	0,022	0,04	0,04	0,04	0,08	0,035	0,14	0,025	0,25
	Vd et Vh^2/d	11,20	0,035	5,60	0,07	2,80	0,14	1,40	0,27	0,56	0,67
7,40	y et y/d	0,06	0,03	0,055	0,055	0,05	0,10	0,04	0,16	0,03	0,30
	Vd et Vh^2/d	14,80	0,045	7,40	0,09	3,70	0,18	1,85	0,36	0,74	0,89
13,—	y et y/d	0 ,095	0,045	0,09	0,09	0,08	0,16	0,06	0,24	0,04	0,40
	Vd et Vh^2/d	26,—	0,08	13,—	0,16	6,50	0,32	3,25	0,73	1,30	1,57
16,—	y et y/d	0,12	0,06	0,11	0,11	0,09	0,18	0,075	0,30	0,045	0,45
	Vd et Vh^2/d	32,—	0,085	16,—	0,19	8,—	0,38	4,—	0,77	1,60	1,93
21,8	y et y/d	0,19	0,095	0,16	0,16	0,12	0,24	0,09	0,36	0,05	0,50
	Vd et Vh^2/d	43,6	0,13	21,8	0,26	10,9	0,52	5,45	1,05	2,18	2,64
26,2	y et y/d	0,23	0,115	0,175	0,175	0,135	0,27	0,10	0,40	0,055	0,55
	Vd et Vh^2/d	52,4	0,15	26,2	0,31	13,1	0,62	6,55	1,26	2,62	3,17
29,—	y et y/d	0,24	0,12	0,19	0,19	0,145	0,29	0,105	0,42	0,06	0,60
	Vd et Vh^2/d	58,—	0,17	29,—	0,35	14,5	0,70	7,25	1,40	2,90	3,51
30,6	y et y/d	0 275	0 14	0,195	0,195	0,15	0,30	0,11	0,44	0,06	0,60
	Vd et Vh^2/d	61,2	0,18	30,6	0,37	15,3	0,74	7,65	1,48	3,06	3,70
35,1	y et y/d	0,305	0,15	0,22	0,22	0,17	0,34	0,125	0,50	0,06	0,60
	Vd et Vh^2/d	70,2	0,21	35,1	0,42	17,5	0,85	8,75	1,70	3,51	4,25
39,2	y et y/d	0,34	0,17	0,24	0,24	0,175	0,35	0,125	0,50	0,065	0,65
	Vd et Vh^2/d	78,4	0,23	39,2	0,47	19,6	0,94	9,80	1,89	3,92	4,74
61,5	y et y/d	0,40	0,20	0,30	0,30	0,185	0,37	0,15	0,60	0,075	0,75
	Vd et Vh^2/d	123,—	0,37	61,5	0,74	30,7	1,48	15,35	2,97	6,15	7,44

Variations des plages

1° *L'écartement des glaces est constant* — $y_h = f_1$ (V, d). — Prenons par exemple l'écartement de 2,05 cm (mesures du tableau numérique A) représentons dans un même graphique les valeurs de la fonction y pour les différents cylindres expérimentés en portant en abcisses les vitesses d'écoulement *(fig. 14)*. Il ressort immédiatement de ce graphique une série de propriétés fondamentales de la variation des plages.

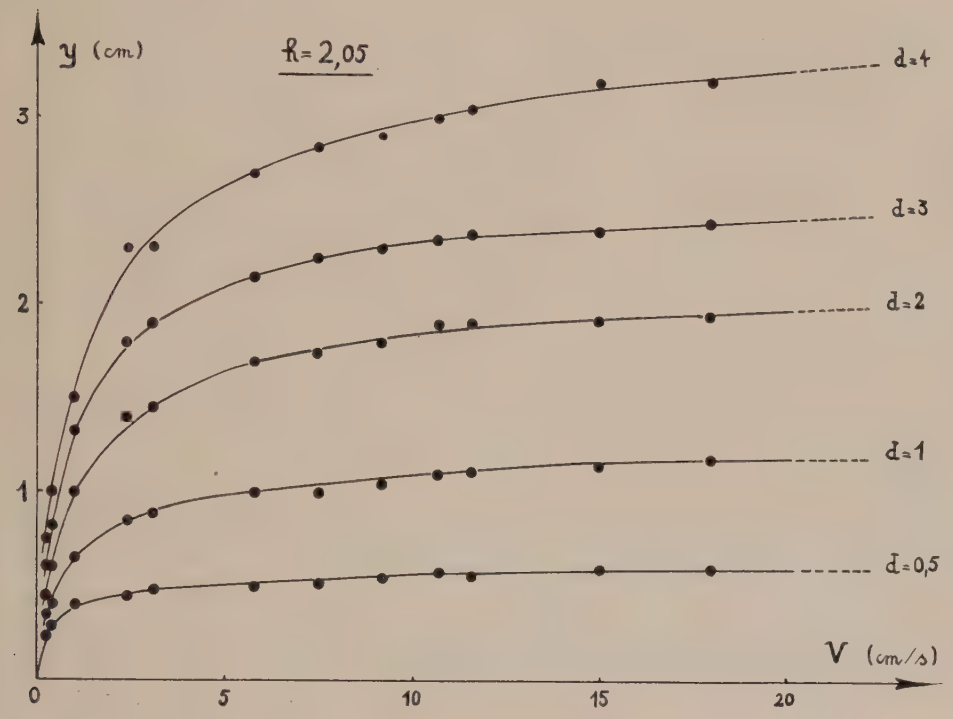


Fig. 14. — Courbes expérimentales. — Variations des plages. — $y = f$ (Vd)

a) La fonction y est croissante avec la vitesse d'écoulement;

b) « s'annule pour V = O, ce qui est naturel, le phénomène disparaissant quand le mouvement devient de plus en plus lent;

c) Pour les grandes vitesses au contraire y tend vers une valeur limite, distincte pour chaque cylindre : autrement dit les courbes admettent des asymptotes horizontales d'équation $y_0 = \varphi\ (d)$. Cette valeur limite est pratiquement d'autant plus vite atteinte que le diamètre de l'obstacle est plus petit, c'est-à-dire que son allongement $\frac{h}{d}$ est plus grand;

d) Il semble d'après les expériences que j'ai pu réaliser, que le phénomène des enroulements subsiste même aux vitesses considérables; mais les mesures deviennent impossibles parce que le régime turbulent s'établit, et que l'extrémité P de la plage subit

alors des fluctuations désordonnées. Il est à peu près certain que le phénomène présente tout de même des particularités aux très grandes vitesses.

Pour les autres écartements des glaces j'arrive exactement aux mêmes résultats, les courbes expérimentales ont même allure et on peut faire des constatations identiques.

2° *Le diamètre des obstacles est constant.* — $y_d = f_2$ (V, h). — Considérons les cylindres de 1 cm de diamètre et portons sur le même graphique les points représentatifs de la fonction y pour les différents écartements étudiés (voir *fig. 15*).

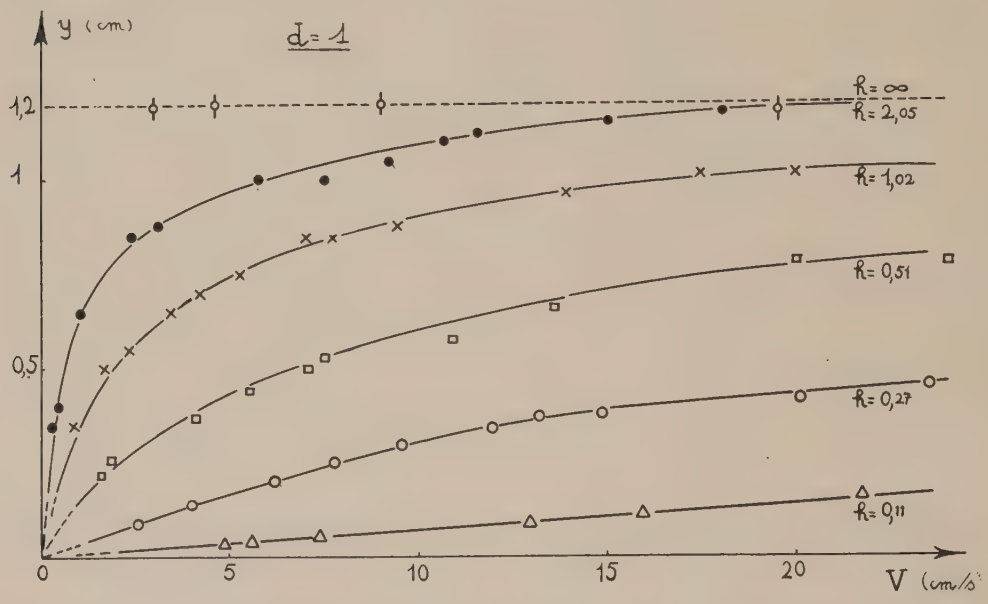


Fig. 15. — Variation des plages en fonction de la vitesse d'écoulement et de l'écartement des glaces pour un cylindre de 1 cm de diamètre. — $y_2 = f_2$ (V, h)

Nous en tirons les conclusions suivantes :

a) Les courbes $y_d = f_2$ (V, h) *admettent la même asymptote horizontale* d'équation $y_0 = \varphi$ (d). Les plages tendent donc vers une seule et unique valeur limite quel que soit l'écartement des glaces, pourvu que la vitesse soit suffisamment grande.

b) Cette valeur asymptotique sera d'autant plus vite approchée que nous choisissons un plus grand écartement h (grands allongements). C'est cette constatation, ainsi que celles que je pourrai faire au chapitre suivant, qui m'ont incité à construire un canal à niveau libre pour obtenir des écoulements de grandes épaisseurs et me rapprocher ainsi des phénomènes cylindriques. Les mesures faites dans le canal ont confirmé ma conclusion de la valeur pratiquement constante des plages pour ce genre d'écoulement. Ainsi pour une hauteur d'eau de 15 cm j'ai trouvé avec un obstacle de 1 cm de diamètre :

Vitesses d'écoulement :	2,9	5,1	9,—	19,5	cm /sec.
Fonction y :	1,19	1,20	1,20	1,18	cm

Pour les vitesses faibles il est très difficile de distinguer la limite de la plage.

c) Dans le cas des petits écartements des glaces la valeur asymptotique y ne sera au contraire approchée que pour les vitesses considérables; mais il est difficile de les atteindre étant donné que des pertes de charge énormes apparaissent dans les écoulements en couches minces. En tous cas, la fonction y n'est jamais nulle, mais elle prend alors des valeurs très petites.

Exemple N° 1. — $h = 0{,}11$ cm $\qquad y = 0{,}032$ cm
$d = 1$ cm
$V = 4{,}9$ cm/sec

Exemple N° 2. — $h = 0{,}06$ cm $\qquad y = 0{,}005$ cm
$d = 1{,}5$ cm
$V = 14$ cm/sec.

Il est impossible pour ce dernier écartement de mesurer correctement les plages correspondant à des vitesses plus faibles. Il va sans dire que les enroulements existent toujours mais ils sont tellement ténus qu'ils sont imperceptibles; en forçant néanmoins le débit pour réaliser une vitesse d'écoulement de l'ordre de 1 m/sec. j'ai pu observer les deux premiers enroulements de la série.

Nous comprenons maintenant pourquoi un écoulement en couches très minces et à des vitesses moyennes (de l'ordre du cm) se fait pratiquement par couches parallèles et que l'influence d'un obstacle n'est décelable que dans une région extrêmement restreinte. C'est à l'intérieur de cette zone miscroscopique que l'écoulement se complique et que nous avons en particulier des composantes de la vitesse normales aux glaces. Ce fait mérite d'être pris en considération dans la théorie de ces écoulements. En effet, par application des équations différentielles des fluides visqueux et moyennant quelques hypothèses on arrive à la conclusion que ce genre d'écoulement d'un fluide réel possède un potentiel des vitesses et qu'il représente donc d'une façon très satisfaisante les écoulements de la théorie des fluides parfaits. Ces hypothèses fondamentales sont :

a) La composante de la vitesse normale aux glaces est nulle.

b) Les variations de la vitesse d'écoulement dans un plan horizontal sont négligeables par rapport aux variations qu'elle subit le long d'une normale aux glaces.

Cette étude de l'évolution des plages en fonction des différents paramètres du problème nous montre donc très clairement que l'on peut passer d'une façon continue des écoulements de Stokes en couches très minces aux écoulements cylindriques. J'aurai l'occasion de préciser ces considérations en étudiant le décollement dans le prochain chapitre.

3° *Variations de la valeur asymptotique des plages (y_0) en fonction du diamètre des obstacles.* — Je viens de montrer que pour un certain diamètre de l'obstacle et quelque soit l'écartement des glaces, la fonction y tend vers une limite bien déterminée quand la vitesse augmente indéfiniment. Pour étudier cette valeur asymptotique sans être obligé d'utiliser des vitesses très grandes, je me suis adressé aux propriétés des écoulements à grande épaisseur réalisables dans le canal ouvert, où l'on atteint la valeur limite pour les vitesses très faibles.

Voici une série d'expériences effectuées avec différents cylindres placés verticalement dans le canal.

Hauteur d'eau : 5 *cm*	*Vitesse moyenne* : 4,5 *cm/sec.*
Diamètre en cm	Plage y en cm
0,1	0,10
0,2	0,22
0,3	0,36
0,4	0,49
0,5	0,59
0,75	0,85
1,00	1,20
1,50	1,81
1,70	2,08
2,00	2,40
2,30	2,80
2,70	3,00
3,00	3,20
4,00	4,41

La fonction $y_0 = F(d)$ est représentée dans la *fig. 16*. Nous voyons que les différents points se placent sur une droite passant par l'origine des coordonnées. Le coefficient angulaire de cette droite est égal à 1,20. Ce n'est que pour les diamètres relativement grands qu'un écart se fait sentir. Cela tient tout d'abord au fait que l'allongement des obstacles diminue, il en résulte que l'étendue de la plage s'écartera de sa valeur asymptotique. Cela est dû sans doute aussi aux dimensions réduites de la section du canal d'écoulement entraînant une interaction de l'obstacle et des parois latérales du canal.

En résumé nous pouvons poser pour un obstacle à grand allongement

$$y_0 = k.d \qquad \text{avec} \qquad k = 1{,}20 \quad (\pm\, 0{,}02).$$

k est le coefficient du phénomène des enroulements; l'étendue de la plage (pour un cylindre circulaire bien entendu) ne peut jamais dépasser la valeur limite de $1{,}20\,d$, quelles que soient les valeurs des paramètres du problème. Je reviendrai sur ces résultats à la fin de mon travail (chapitre VI).

La reprise de ces expériences effectuées avec des cylindres de sections variées (rectangulaires, triangulaires, elliptiques, etc...), voir même avec des plaques très allongées, donnerait d'autres valeurs numériques pour le coefficient k intéressantes à comparer.

Déplacement du centre du premier enroulement en fonction de la vitesse d'écoulement.

Ces déplacements sont très difficiles à suivre : ils sont extrêmement faibles en comparaison des variations des plages. Pour les vitesses faibles il est d'abord impossible de distinguer nettement le centre de l'enroulement; quand nous pouvons enfin le localiser, l'influence de la vitesse est déjà très réduite. La *fig. 17* représente le déplacement

dans une expérience avec un écartement de glaces de 2,05 cm et un diamètre de l'obstacle de 3 cm.

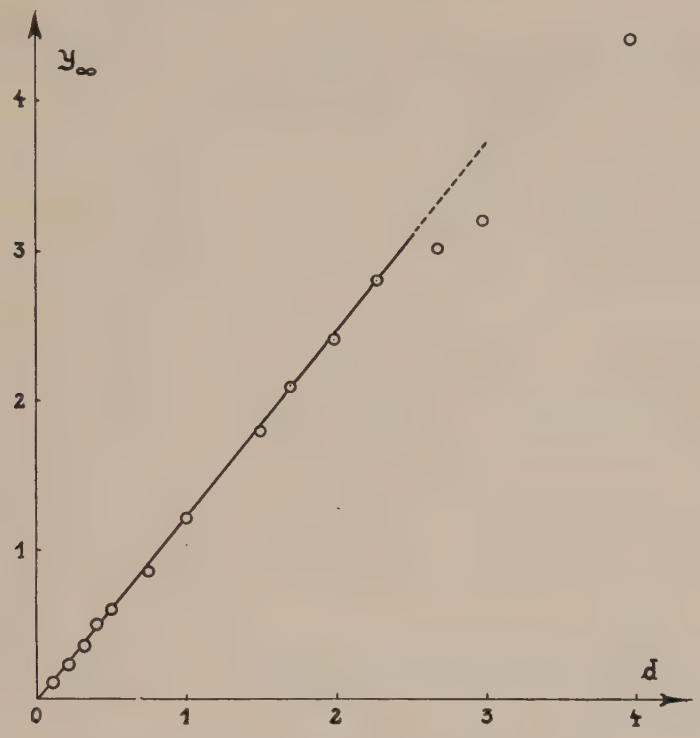


Fig. 16. — Variation de la valeur asymptotique des plages en fonction du diamètre des obstacles

Nous avons une branche de courbe A B dont l'extrémité A correspond au début du phénomène; je n'ai pas pu extrapoler cette courbe au-delà du point A. Nous voyons

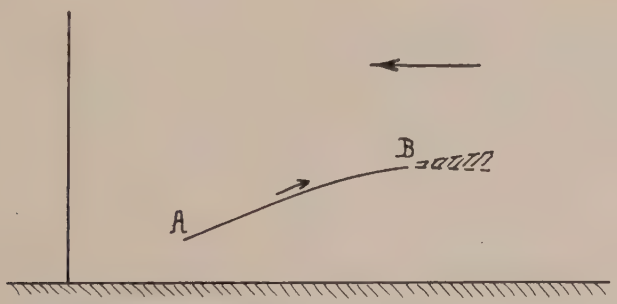


Fig. 17. — Déplacement du centre du premier enroulement en fonction de la vitesse d'écoulement

que l'enroulement avance lentement contre le courant (comme l'extrémité P de la plage), son écartement avec la glace allant légèrement en croissant. Aux grandes vitesses enfin, l'enroulement devient instable par suite de la turbulence, et la précision des mesures diminue très rapidement. Comme nous l'avons prévu pour les plages des particularités se présenteront dans l'évolution des enroulements.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Beaucoup de chercheurs ont déjà vu des tourbillons en amont d'obstacles divers, mais ils ne semblent avoir aperçu que le premier de la série sans discerner :

1° Les liens de ce tourbillon avec le reste de l'écoulement;

2° La véritable cause du phénomène;

3° Le courant particulier dans la plage;

4° Le caractère général du phénomène.

A. *Tourbillons*

Riabouchinsky, (Soc. Math. de France, 59, 1931, p. 310), signale des tourbillons en amont de seuils placés dans un courant fluide.

Piercy et Richardson, (Phil. Mag., 9, 1930, p. 1038) ont étudié un phénomène de turbulence à l'avant des obstacles (dans l'air).

B. *Plages*

Riabouchinsky, (Bull. Inst. Aéro. Koutchino, III, 59, Moscou, 1909), réalise un spectre d'écoulement dans la couche limite d'un obstacle cylindrique posé sur une plaque de fer saupoudrée de lycopode et placée dans un courant d'air. Nous voyons que l'auteur a obtenu tout simplement une trace de la plage du phénomène des enroulements à 3 dimensions.

Fales, (Visual Study of Flow, Washington, 1916), étudie un problème analogue en enduisant ses surfaces d'une peinture spéciale visqueuse (pétrole + noir de fumée).

CHAPITRE III

ÉTUDE DU DÉCOLLEMENT
ANGLES DE DÉCOLLEMENT - RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

L'étude théorique du décollement peut être entreprise pour un écoulement cylindrique; dans la théorie de la couche limite de Prandtl on fait deux hypothèses fondamentales :

1° L'épaisseur de la couche limite est petite par rapport aux dimensions géométriques des obstacles (1).

2° En dehors de la couche limite le fluide se comporte comme un fluide parfait, sans viscosité

Je me contente de renvoyer le lecteur aux calculs devenus classiques de Blasius et de Hiementz. Ce dernier auteur a repris les équations générales des fluides visqueux et il a trouvé pour l'angle de décollement compté à partir de la génératrice amont du cylindre la valeur de 82°, en parfait accord avec les expériences qu'il a effectuées parallèlement aux recherches théoriques.

Cette théorie relative à des écoulements avec sillage ne tient pas compte de l'influence de la variation de la vitesse d'écoulement et on ne voit pas comment s'opère le passage d'un écoulement irrotationnel de Stokes à celui d'un écoulement avec sillage et décollement à 82°.

Je me suis donc proposé de traiter expérimentalement le problème suivant : *Etudier les variations de l'angle de décollement avec la vitesse, repérer en même temps les vitesses critiques de changement de régime et rechercher s'il existe une influence de ces régimes sur les variations étudiées de l'angle de décollement.*

Principe des mesures.

Pour entreprendre cette étude j'ai été obligé tout d'abord de construire des obstacles spéciaux pour la détermination rigoureuse de la ligne de décollement, à condition

(1) Rappelons qu'en général l'épaisseur ε de la couche limite le long d'une surface est donnée par la relation suivante :

$$\varepsilon = k \sqrt{\frac{\nu x}{V}}$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide; x une longueur caractéristique; V la vitesse à l'infini; k une constante numérique.

que celle-ci ne présente aucun point singulier et ne soit pas trop compliquée. Des expériences préliminaires m'ont montré en effet que la ligne de décollement est loin d'être une génératrice du cylindre; cela ne nous surprend d'ailleurs pas étant donné qu'il existe des phénomènes très complexes en amont de l'obstacle (signalés dans le chapitre précédent) et que près de l'obstacle l'écoulement ne se fait plus par couches parallèles. Toujours dans le but de ne matérialiser qu'un seul point de décollement parfaitement déterminé, de n'émettre qu'un seul filet d'exploration pour ne pas masquer le champ, j'ai monté un obstacle à alimentation intérieure dont la surface est telle qu'un point quelconque puisse devenir un lieu d'émission de liquide coloré. Voici la description d'un tel obstacle (*fig. 18*) :

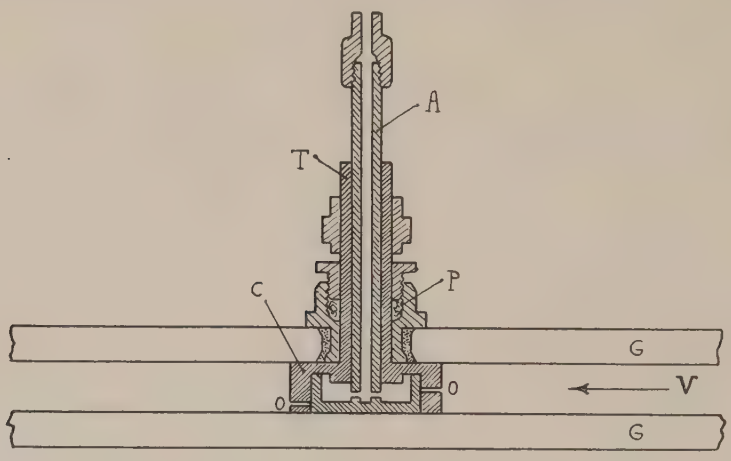


Fig. 18. — Obstacle spécial à alimentation intérieure

L'obstacle proprement dit est un cylindre de révolution C; il porte une tige creuse T, axiale et traversant un presse-étoupe P dont la monture est scellée dans la glace supérieure du tunnel hydrodynamique. Le tunnel monté, l'ensemble se comporte donc comme un obstacle cylindrique ordinaire placé entre glaces parallèles. L'obstacle a une cavité dans laquelle vient se loger un deuxième cylindre, également creux et portant une tige creuse A. Les deux cylindres sont parfaitement ajustés ainsi que les deux tiges creuses. La surface du cylindre extérieur est partagée en huit secteurs de 45°. Sept des génératrices ainsi obtenues portent chacune un petit orifice de 4/10e de mm et disposé comme suit :

Numéros des génératrices.....	1	2	3	4	5	6	7
Distances des orifices à la base inférieure.	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75
Distances des orifices à la base supérieure.	8,75	7,50	6,25	5,00	3,75	2,50	1,25

La huitième génératrice porte au contraire une série d'orifices en forme de peigne, très pratique dans certaines expériences. Les orifices des sept génératrices sont donc disposés en hélice sur la surface du cylindre. Le cylindre intérieur au contraire porte une fente le long d'une génératrice; suivant la position relative de ces deux cylindres je peux donc émettre du liquide coloré par l'un des orifices ou par le peigne.

Pour mesurer l'angle de décollement relatif à un plan horizontal, j'émets du liquide coloré par l'orifice correspondant; puis je coupe l'arrivée de ce liquide, j'évite

ainsi tout risque de perturbation et l'orifice débite encore suffisamment de colorant pour pouvoir faire une mesure. J'observe l'écoulement suivant la verticale et en agissant sur l'obstacle j'arrive à placer l'orifice d'émission au point de décollement.

Suivant la précision à réaliser, la rotation de l'obstacle avec sa tige cylindrique peut être mesurée soit à l'aide d'un limbe gradué (cas des écoulements en couches minces) soit à l'aide d'un miroir (cas des écoulements dans le canal). Je peux déterminer de cette façon un angle de décollement à 1/4 de degré près en faisant les deux lectures droite et gauche pour les deux décollements.

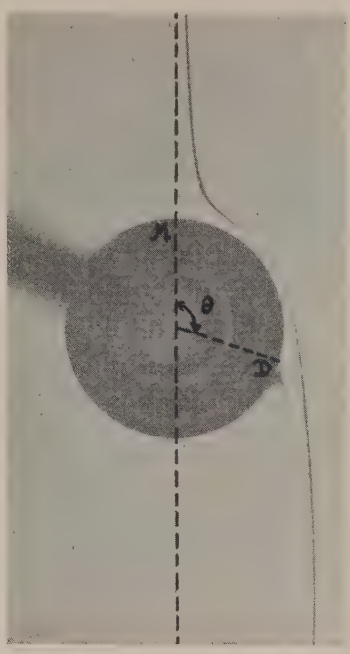


Fig. 19. — Photographie d'un décollement

Étude de la ligne de décollement.

Contrairement à ce qui se passe pour un phénomène cylindrique la ligne de décollement n'est pas une génératrice du cylindre. L'angle de décollement θ va en augmentant quand on passe d'une glace vers le plan médian de l'écoulement (le décollement est porté en aval) où il présente un maximum, voir la photographie de la *fig. 19.*

La ligne de décollement est naturellement symétrique par rapport à ce plan, elle affecte en gros la forme d'une accolade dont la pointe est dirigée vers le sillage, voir à cet effet l'une des lignes de la *fig. 22.* La forme et la position de cette ligne varient avec la vitesse; les deux branches présentent un point d'inflexion, leur raccord avec les deux glaces est très délicat à déterminer, étant donné que les dimensions géométriques sont très petites et les vitesses locales très réduites.

Variation de l'angle de décollement en fonction de la vitesse. Régimes d'écoulement.

J'ai opéré avec l'obstacle spécial (écartement des glaces de 1,02 cm) en mesurant d'une part l'angle de décollement maximum dans le plan médian de l'écoulement, et en déterminant d'autre part toute la ligne de décollement par sa forme et sa disposition sur la surface du cylindre. L'ensemble des mesures et des observations est condensé dans le tableau numérique B (variation des angles de décollement), des tableaux placés à la fin de ce chapitre, pages 43, 44, 45, 46 et 47. Le graphique de la *fig. 20* montre l'allure du phénomène.

Nous voyons tout d'abord que l'angle θ suit une variation continue depuis la valeur de 180° (décollement nul) qui correspond aux vitesses faibles (régime de Stokes) jusqu'à la valeur de 85° correspondant au maximum de la vitesse atteinte dans cette expérience (76 cm/sec).

Au cours de ces expériences j'ai rencontré évidemment les différents régimes d'écoulement dont je donne quelques photographies *(fig. 21)*.

1° *Régime de Stokes.* — Quand la vitesse d'écoulement est très faible, il n'y a pas de décollement appréciable, l'angle θ est donc très voisin de 180°. Ce régime est difficile à atteindre.

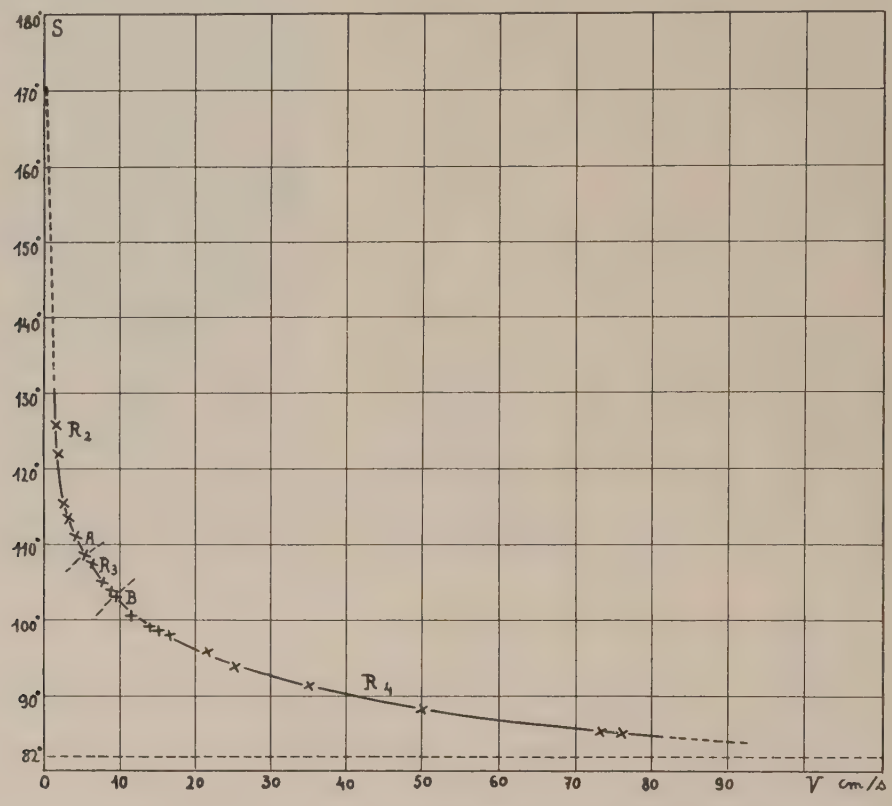


Fig. 20. — Variation de l'angle de décollement en fonction de la vitesse

2° *Régime des tourbillons fixes.* — Photographie (1), angle θ = 130°. Photographie (2), angle θ = 111°.

Dès que la vitesse dépasse la valeur de 0,3 cm/sec. le fluide décolle du cylindre et il se forme deux tourbillons fixes. Ce régime dure jusqu'à la vitesse de 5,15 cm/sec. L'angle θ varie dans cet intervalle de 180° jusqu'à 108°,40. Dans la *fig. 20* ce régime correspond à la partie de la courbe comprise entre les points S et A. (R_2.)

3° *Régime des tourbillons symétriques.* — Photographie (3), angle θ = 105°. — La fin du régime précédent est marquée d'abord par l'apparition de pulsations suivies de la formation d'une rue de tourbillons symétriques, stables, mais s'étendant sur une partie restreinte de l'échelle des vitesses, entre 5,15 cm/sec. et 9,20 cm/sec. L'angle de décollement diminue de 108°,40 à 103°. C'est la partie R_3 de la courbe entre les points A et B *(fig. 20)*.

4° *Régime des tourbillons alternés.* — Photographie (4), angle $\theta = 98°$. — L'angle de décollement diminue toujours, mais moins rapidement, comme le montre d'ailleurs la branche R_4 du graphique du décollement.

5° *Les sillages.* — Photographie (5), angle $\theta = 92°$. — Ce régime prolonge le précédent sans qu'une frontière précise et définie puisse le séparer. L'angle θ subit sa décroissance continue et il atteint la valeur de 85° pour la vitesse de 76 cm/sec.

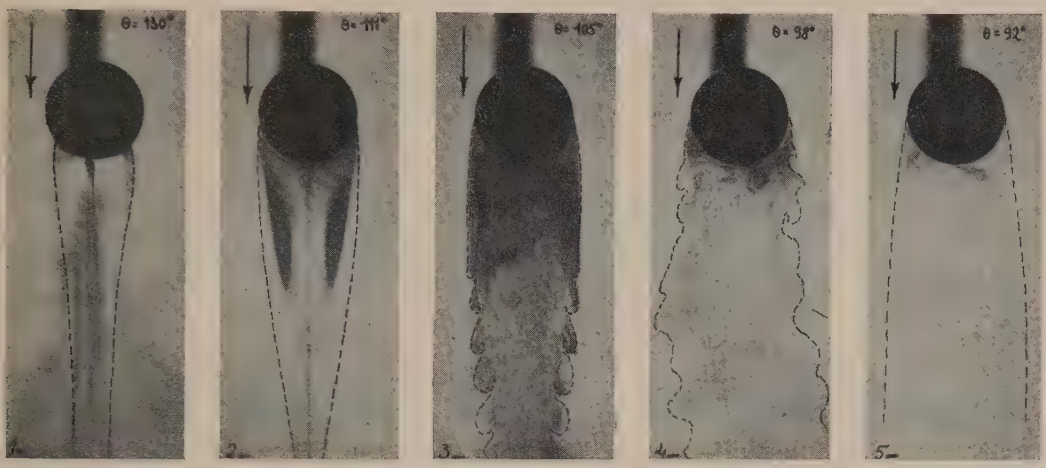


Fig. 21. — Différents régimes d'écoulement

Nous remarquons spécialement la rapide décroissance de l'angle de décollement avec la vitesse, quand celle-ci atteint 1 cm/sec. l'angle θ est déjà tombé à 135°. Ajoutons enfin pour terminer que les transitions entre les différents régimes d'écoulement ne sont marqués par aucune irrégularité du graphique du décollement (à la précision des mesures près).

Évolution de la forme de la ligne de décollement.

Pour compléter le travail j'ai mesuré avec l'obstacle spécial les angles de décollement dans les autres plans d'écoulement de façon à obtenir la forme de la ligne de décollement (par sept points) et cela pour différentes vitesses. Le graphique de la *fig. 22* montre cette évolution. Pour les vitesses faibles : 1,40, 2,60, 9,0 cm/sec., la ligne présente les deux branches symétriques se raccordant en accolades dont le sommet est dirigé vers le sillage. Quand la vitesse croît, la ligne de décollement se déplace sur la surface latérale du cylindre en remontant le courant; mais sa forme change. La pointe va en s'atténuant pour disparaître même aux vitesses fortes. Lorsque V = 72 cm/sec. la ligne de décollement possède un palier central où le décollement est constant. Il semblerait d'après ces expériences que si la vitesse allait encore en augmentant, la ligne de décollement se rapprocherait indéfiniment de la génératrice du cylindre dont l'azimut est de 82° (segment T_1, T_2 de la *figure 22*).

N. B. — Dès que nous dépassons la fin du régime des tourbillons fixes l'angle de décollement, par suite du détachement périodique des tourbillons (symétriques d'abord, alternés ensuite), est défini en réalité par deux limites : la limite avant (minimum de l'angle θ), la limite arrière (maximum de l'angle θ).

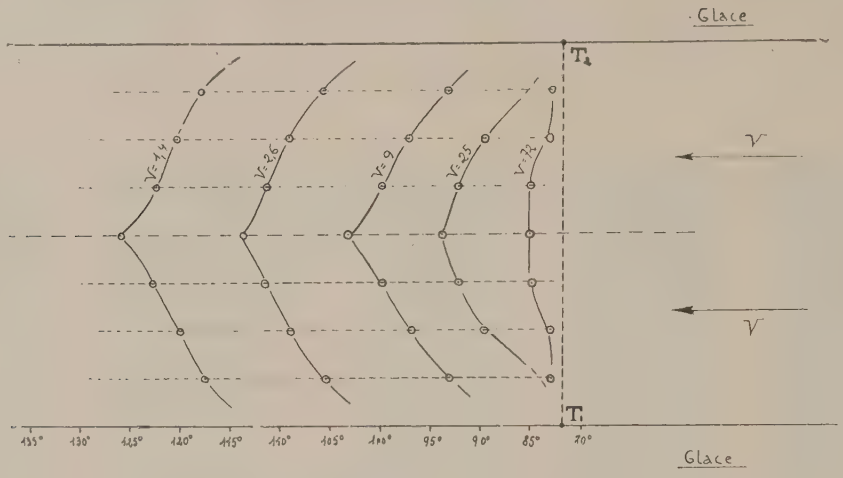


Fig. 22. — Évolution de la ligne de décollement avec la vitesse d'écoulement

Les mesures apportées ici concernent la limite extrême avant (1). L'écart de ces deux grandeurs est matérialisé sur le cylindre par une bande très étroite, la zone de décollement.

Investigation d'un écoulement au voisinage immédiat des parois par auto-inscription des filets fluides. — Méthode de l'iode.

La détermination de la ligne de décollement par quelques points seulement ne peut prétendre à donner sa forme exacte. Aussi ai-je été amené à chercher une méthode d'investigation de l'écoulement au voisinage immédiat des parois, sans produire aucune perturbation spécifique, susceptible de se superposer à l'écoulement général. Dans un but analogue, différents auteurs ont proposé l'emploi :

1° De surfaces enduites d'une couche relativement mince d'une substance appropriée et sur lesquelles doit se graver l'écoulement (peinture, huile, etc...);

2° De surface saupoudrées d'une matière dont les grains s'orientent plus ou moins parallèlement aux filets fluides en formant des spectres.

J'ai rejeté ces méthodes, car une perturbation parasite peut en effet prendre naissance au voisinage d'une paroi ainsi modifiée, s'amplifier et se continuer dans tout le domaine à étudier, détruisant ou déformant le phénomène principal. Le risque en sera particulièrement grand puisqu'au voisinage des parois le gradient des vitesses est considérable.

La méthode consiste à rendre *les parois sensibles à l'action des filets fluides* grâce à une réaction chimique qui amènera un changement de couleur de la surface sensibilisée tout en laissant intact son état physique. Après beaucoup d'essais, j'ai été conduit à

(1) L'étude de la fluctuation du décollement entre les instants de départ de deux tourbillons consécutifs peut donner lieu à une étude intéressante que nous nous proposons d'entreprendre ultérieurement.

utiliser la réaction de l'iode sur l'argent métallique : la paroi est recouverte d'une mince pellicule d'argent réduit de couleur noire (gélatino-bromure d'argent préalablement exposé, développé et fixé) et les filets sont constitués d'une solution d'iode dans l'iodure de potassium. L'argent réduit sera dissout par l'iode des filets limites passant près de la paroi en donnant de l'iodure d'argent de couleur blanc-jaunâtre d'après la réaction :

$$Ag + I = AgI.$$

Partout où le filet a pu se rapprocher de la paroi, il laissera donc une trace blanche. L'opération terminée, on dissoudra l'iodure formée dans l'hyposulfite de sodium. La surface ainsi traitée reste lisse à la définition du grain près.

Il faut naturellement en plus, que les filets actifs aient la même densité que l'eau, condition facile à remplir puisque l'iode est encore très actif aux fortes dilutions et qu'on peut d'ailleurs corriger la densité en ajoutant de faibles quantités d'alcool.

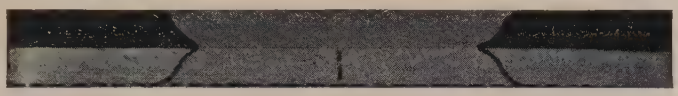


Fig. 23. — Décollement sur un cylindre entre glaces parallèles (Méthode de l'iode)

J'ai appliqué immédiatement cette méthode à la détermination précise de la ligne de décollement sur le cylindre entre glaces parallèles. La façon la plus commode de procéder est d'injecter tout simplement la solution d'iode dans le sillage de l'obstacle; toute la partie correspondante de la surface latérale sera décolorée. La photographie de la *figure 23* représente le développement de cette surface coupée suivant la génératrice de bifurcation amont. L'iode ayant seulement agi dans la moitié inférieure du sillage, nous ne voyons que l'une des branches de la ligne de décollement, l'autre moitié symétrique ayant été ajoutée. Nous remarquons notamment la netteté frappante de la ligne, définissant ainsi un passage brusque et rigoureusement permanent de la région amont de l'obstacle à la région aval du sillage. Notons enfin, la concordance parfaite entre la valeur de l'angle de décollement (maximum) déduit de cette méthode et la valeur obtenue par mesure directe. En effet, nous avons là une méthode d'investigation qui permet également d'effectuer des mesures d'une façon très précise :

Exemple :

Écartement des glaces	1,02 cm
Diamètre de l'obstacle	3,00 cm
Vitesse d'écoulement..	5,10 cm/sec.
Méthode de l'iode, angle de décollement	= 109°,25
Mesure directe «	= 108°,95

N. B. — La méthode de l'iode pourra être en outre d'un emploi intéressant pour l'étude de phénomènes non permanents mais présentant par leur périodicité une certaine régularité. Il va sans dire, qu'elle pourra être utilisée également pour l'investigation des écoulements au voisinage d'obstacles plus compliqués; j'aurai l'occasion d'y revenir encore dans les chapitres suivants.

La méthode de l'iode pourra enfin être d'un usage très précieux pour l'étude des surfaces rugueuses (sillages des rugosités).

Variation de l'angle de décollement et évolution des régimes d'écoulement en fonction de l'écartement des glaces.

Je me suis borné jusqu'ici d'étudier le décollement sur un obstacle bien défini géométriquement. Or, nous pouvons nous demander dans quel sens évoluent les résultats

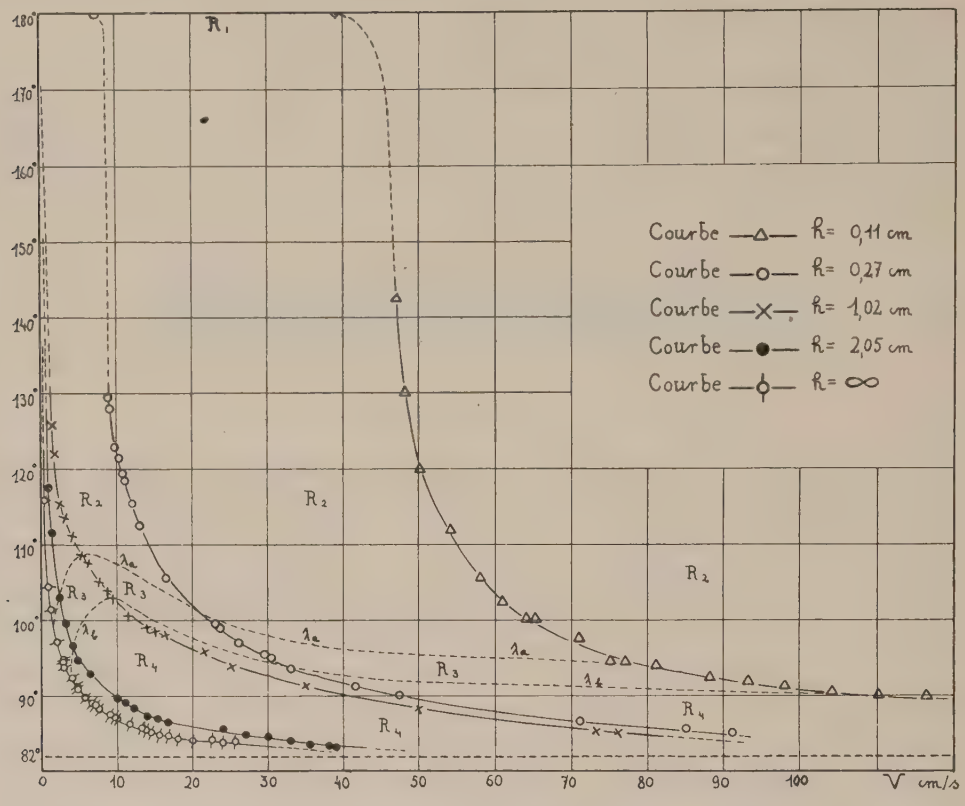


Fig. 24. — Variation de l'angle de décollement et évolution des régimes en fonction de la vitesse et de l'écartement des glaces

précédemment trouvés, quand aux paramètres du problème s'ajoute encore l'écartement des glaces. Ce sont spécialement les cas limites qui ont attiré mon attention, à savoir :

Les écoulements en couches très minces (*h* petit)
« cylindriques (*h* grand).

J'ai donc complété les mesures et les observations faites avec l'écartement de 1,02 cm en expérimentant le phénomène avec les différentes épaisseurs possibles. Les résultats sont groupés dans les tableaux numériques A. C. D. E avec le tableau B. L'angle de décollement est toujours mesuré dans le plan médian; les mesures sont représentées graphiquement dans la *fig. 24*. L'étude de ce graphique permet de tirer les conclusions suivantes :

1° Quel que soit l'écartement des glaces choisi, les courbes de décollement ont toujours même allure, c'est-à-dire : décollement nul, régime de Stokes, $\theta = 180°$, pour

les vitesses faibles, asymptote commune pour les vitesses fortes : droite $\theta_0 = 82^o$, angle de décollement déduit de la théorie de la couche limite.

2° Au fur et à mesure que l'écartement des glaces diminue, les forces de viscosité se font de plus en plus sentir au dépens des forces d'inertie, ce qui entraîne les deux conséquences suivantes :

a) A une vitesse maintenue constante, l'angle θ va en croissant quand l'écartement h diminue (retardement du décollement), ainsi à titre d'exemple :

Vitesse d'écoulement V = 30 cm/sec.

h :	0,11	0,27	1,02	2,05	5-10-15
:	180°	95°	92°50	84°40	83°20

b) Les vitesses critiques de changement de régime évoluent; le tableau suivant contient les mesures effectuées :

Écartements h	0,11	0,27	1,02	2,05	5-10-15
Régime de Stokes R_1	0	0,	0,	0,	0,
Tourb. fixes R_2	39	7,60	0,30	0,20	0,01
Tourb. symétr. R_3	77	21,—	5,30	2,40	1,50
Tourb. alternés, sillages R_4	110	33,—	9,20	4,10	3,90

Ces valeurs numériques définissent des courbes de transition entre les différents régimes, courbes en pointillé λ_a et λ_b de la *fig. 24.*

Ainsi le graphique est partagé en une série de domaines représentant chacun un régime d'écoulement :

Régime de Stokes	R_1	représenté par la droite $\theta = 180^o$.
Tourb. fixes	R_2	entre la droite $\theta = 180^o$ et la courbe λ_a.
Tourb. symétriques	R_3	entre la courbe λ_a et la courbe λ_b.
Tourb. alternés et sillages	R_4	au-delà de la courbe λ_b.

3° Quand nous augmentons l'écartement des glaces il devient très difficile d'éviter le décollement et même d'obtenir des angles de décollement notablement différents de 82°. En particulier pour les grands écartements, et plus spécialement pour les écoulements en canal ouvert (voir chapitre suivant), la courbe de décollement tend très rapidement vers la droite asymptote $\theta_0 = 82^o$.

Pour essayer d'élucider ce que devient la courbe de décollement pour un cylindre à très grand allongement j'ai opéré avec trois hauteurs d'eau différentes : 5, 10 et 15 cm. J'ai voulu tout d'abord me rendre compte de l'allure générale de la ligne de décollement sur les obstacles; en émettant du liquide coloré nous voyons immédiatement qu'elle est disposée le long d'une génératrice, sauf aux extrémités du cylindre, j'ai donc mesuré

l'angle de décollement à mi-hauteur d'eau. En faisant la représentation graphique des mesures j'ai constaté que les trois courbes se trouvent superposées sans aucun écart systématique; il semble donc que j'ai atteint la courbe limite $h = \infty$, et que dans un écoulement cylindrique l'angle de décollement n'est pas constant; il varie encore d'une façon continue depuis 180° jusqu'à 82°, valeur qui n'est atteinte que pour les grandes vitesses. C'est précisément dans ce cas que l'épaisseur de la couche limite est faible, et que la théorie peut être en accord avec l'expérience. Ce résultat est d'ailleurs conforme aux recherches de divers auteurs qui, en étudiant les régimes d'écoulement, ont constaté une variation de l'angle de décollement.

En définitive quand nous sommes en présence d'un écoulement entre glaces parallèles : si l'écartement est grand, nous avons une image très approximative des phénomènes cylindriques en liquide illimité, sous réserve que la vitesse ne soit pas trop petite; si l'écartement est faible (écoulement en couches minces de Hele Shaw), nous nous trouvons presque à coup sûr sur le palier supérieur de la courbe de décollement (θ voisin de 180°) à moins que la vitesse ne soit par trop grande.

Ces deux sortes d'écoulements, qui en apparence sont d'aspect très différent, constituent donc en réalité les cas extrêmes d'une chaîne continue : en écoulement mince nous pouvons nous rapprocher des propriétés des phénomènes cylindriques si nous choisissons des vitesses suffisamment grandes; en écoulement à grande épaisseur nous pouvons réciproquement nous rapprocher des propriétés des écoulements de Stokes à condition de choisir une vitesse extrêmement réduite. Dans tous les cas tous les régimes existent dans le même ordre de succession.

Ces résultats complètent les conclusions tirées de l'étude du phénomène des enroulements : un écoulement en couches minces représente d'une façon très satisfaisante les écoulements de la théorie des fluides parfaits, d'une part parce que le phénomène des enroulements est très réduit, d'autre part parce qu'il n'y a pas de décollement.

En ce qui concerne l'autre cas extrême, à savoir : les écoulements cylindriques, je leur consacrerai le chapitre suivant.

N. B. — J'insiste sur le fait qu'en mesurant les angles de décollement et en étudiant les régimes d'écoulement j'ai observé les couches centrales de l'écoulement et non pas la surface libre qui, par suite de la tension superficielle est une image d'autant plus déformée de l'écoulement que la vitesse est plus faible. Ainsi pour la hauteur d'eau de 10 cm à la vitesse de 0,09 cm/sec. le régime est à tourbillons fixes avec un angle $\theta = 132°$, tandis que l'écoulement matérialisé à la surface ne décèle plus de décollement.

Variations de l'angle de décollement.

Tableau numérique A

Écartement des glaces : $h = 2{,}05$ cm. Température : $13°{,}5 \pm 0°{,}5$. Signe des courbes : —●—

Vitesse moyenne cm/sec	Angles de décollement			Régimes d'écoulements	Observations
	Lecture d. (degrés)	Lecture g. (degrés)	Angle moy. (degrés)		
1,—	118,50	116,50	117,50	R. Tourb. fixes	Si $V < 0{,}20$ régime de Stokes
1,40	112,50	110,50	111,50	»	
2,40	104,—	102,—	103,—	R. Tourb. symétriques	
3,20	100,50	98,50	99,50	»	
4,10	97,50	95,50	96,50	R. Tourb. alternés	
4,80	95,50	93,60	94,60	»	
6,40	93,75	91,75	92,75	»	
10,—	90,50	88,50	89,50	»	
11,10	90,—	88,—	89,—	»	
12,20	89,—	87,50	88,25	»	
14,—	87,80	86,60	87,20	»	
15,30	87,40	86,—	86,70	»	
16,70	87,10	85,70	86,40	»	
24,—	85,75	85,25	85,50	»	
27,—	85,35	84,25	84,80	»	
30,—	85,—	84,—	84,50	»	
33,—	84,50	83,50	84,—	»	
36,—	84, —	83,—	83,50	»	
38,—	83,50	83,—	83,25	»	
38,7	83,—	83,—	83,—	»	

Variations de l'angle de décollement.

TABLEAU NUMÉRIQUE B

Écartement des glaces : $h = 1{,}02$ cm. Température : $13°{,}5 \pm 0°{,}5$. Signe des courbes : —X—

Vitesse moyenne cm/sec	Angles de décollement			Régimes d'écoulements	Observations
	Lecture d. (degrés)	Lecture g. (degrés)	Angle moy. (degrés)		
1,40	125,50	127,35	126,40	R. Tourb. fixes	Si V < 0,30 régime de Stokes. On ne peut déceler un décoll.
1,83	121,—	123,—	122,—	»	
2,50	114,30	116,40	115,35	»	
3,—	112,50	114,65	113,60	»	
4,—	109,90	112,—	110,95	»	
5,15	107,85	108,90	108,40	R. Tourb. symétriques	
6,20	106,55	108,45	107,50	»	
7,50	104,25	105,80	105,—	»	
8,70	103,—	105,—	104,—	»	
9,20	102,20	103,85	103,—	R. Tourb. alternés	
11,50	100,05	101,25	100,65	»	
14,—	98,20	100,10	99,15	»	
15,—	97,70	99,35	98,55	»	
16,50	96,90	99,20	98,05	»	
21,50	95,20	96,20	95,70	»	
25,30	93,—	95,—	94,—	»	
35,—	90,25	92,50	91,40	»	
50,—	87,45	89,50	88,50	»	
73,30	84,—	86,50	85,25	»	
76,—	85,—	85,—	85,—	»	

Variations de l'angle de décollement.

TABLEAU NUMÉRIQUE C

Écartement des glaces : $h = 0{,}27$ cm. Température : $13°,5 \pm 0°,5$. Signe des courbes : —O—

Vitesse moyenne cm/sec	Angles de décollement			Régimes d'écoulements	Observations
	Lecture d. (degrés)	Lecture g. (degrés)	Angle moy. (degrés)		
8,8	130,—	129,—	129,50	R. Tourb. fixes	Si $V < 7{,}6$ régime de Stokes
9,—	128,50	127,50	128,—	»	
9,8	123,50	122,50	123,—	»	
10,3	122,—	121,—	121,50	»	
10,7	120,—	119,—	119,50	»	
11,—	119,—	118,—	118,50	»	
12,—	116,—	114,40	115,20	»	
13,2	113,—	112,—	112,50	»	
16,6	106,—	105,—	105,50	»	
23,—	98,65	100,55	99,60	R. Tourb. symétriques	
23,6	100,—	98,—	99,—	»	
26,—	97,55	96,—	96,80	»	
29,60	96,10	95,20	96,65	»	
30,20	96,—	94,—	95,—	»	
33,—	94,—	93,—	93,50	R. Tourb. alternés	
41,50	92,—	90,85	91,40	»	
47,20	91,05	98,—	90,—	»	
71,—	87,15	86,10	86,60	»	
85,—	86,—	85,—	85,50	»	
92,—	85,50	84,50	85,—	»	

Variations de l'angle de décollement.

TABLEAU NUMÉRIQUE D

Écartement des glaces : $h = 0{,}11$ cm. Température : $13°{,}5 \pm 0°{,}5$. Signe des courbes : ——△——

Vitesse moyenne cm/sec	Angles de décollement			Régimes d'écoulements	Observations
	Lecture d. (degrés)	Lecture g. (degrés)	Angle moy. (degrés)		
47,—	140,—	145,—	142,50	R. Tourb. fixes	Si V < 0,39 régime de Stokes
48,—	130,—	130,—	130,—	»	
50,—	118,—	122,—	120,—	»	
54,—	110,—	114,—	112,—	»	
58,—	105,—	106,—	105,50	»	
61,—	100,—	105,—	102,50	»	
64,—	101,—	99,—	100,—	»	
65,—	101,—	99,—	100,—	»	
71,—	100,—	95,—	97,50	»	
75,—	94,—	95,—	94,50	»	
77,—	94,—	95,—	94,50	R. Tourb. symétriques	
81,—	92,—	96,—	94,—	»	
88,—	91,—	94,—	92,50	»	
93,—	91,—	93,—	92,—	»	
98,—	91,—	92,—	91,50	»	
104,—	89,—	92,—	90,50	»	
110,—	89,—	91,—	90,—	R. Tourb. alternés	
116,—	89,—	91,—	90,—	»	
121,—	89,—	89,—	89,—	»	
125,—	88,—	90,—	89,—	»	

Variations de l'angle de décollement.

TABLEAU NUMÉRIQUE E

Écartement des glaces $h = \infty$. Température : 13°,5 $\pm$ 0°,5. Signe des courbes : —○—

h = 5 cm		h = 10 cm		h = 15 cm	
Vitesse moyenne cm/sec	Angle de décollement (degrés)	Vitesse moyenne cm/sec	Angle de décollement (degrés)	Vitesse moyenne cm/sec	Angle de décollement (degrés)
2,77	95,75	0,41	116,—	1,25	101,30
12,50	85,75	0,96	104,50	3,03	94,60
13,80	85,50	2,—	97,—	3,50	94,—
15,40	84,75	3,—	94,—	3,92	92,45
16,66	84,75	4,80	90,80	4,60	91,20
18,10	84,20	7,10	88,66	5,70	89,60
20,—	84,—	10,—	86,66	6,50	89,—
22,70	84,25	13,30	85,50	7,51	88,25
24,—	83,75	14,30	85,—	9,10	87,50
25,60	84,—	15,40	84,75	9,76	86,80

Régime d'écoulement :

R. de Stokes	Si $V < 0{,}01$.
R. des Tourb. fixes	$0{,}01 < V < 1{,}50$.
R. des Tourb. symétr.	$1{,}50 < V < 4{,}—$.
R. des Tourb. alternés Sillages.	$4{,}— < V$.

CHAPITRE IV

LES ÉCOULEMENTS CYLINDRIQUES

Nous venons de préciser l'importance de l'étude des écoulements entre glaces parallèles au point de vue de leur relation avec les phénomènes cylindriques. Un écoulement entre glaces parallèles sera une image d'autant plus conforme de ces derniers que l'écartement sera plus grand. Pour entreprendre l'investigation de ces phénomènes j'ai donc construit le canal d'écoulement à surface libre en expérimentant un cylindre circulaire posé sur le fond (1). Le but poursuivi est de savoir :

1° Quel est le lien qui existe entre le phénomène des enroulements (qui subsiste comme nous le savons) et la distribution des vitesses?

2° Comment s'opère le passage du domaine des enroulements près de la paroi aux régions centrales du canal où l'écoulement se fait sensiblement par couches parallèles horizontales?

3° Comment se présente la ligne de décollement sur l'obstacle (allongement élevé) et quelle est l'influence du gradient des vitesses?

La détermination précise de la distribution des vitesses est donc fondamentale pour la résolution de ce triple problème.

Détermination précise des vitesses (et des accélérations) par strobo-photographie de gouttelettes.

Cette méthode permet de faire des mesures absolues, d'étudier les écoulements lents et d'opérer en un endroit choisi d'avance. Elle est basée sur l'emploi de gouttelettes non miscibles avec l'eau et dont j'ai déjà parlé dans la description de l'appareillage et lors de la matérialisation des enroulements (2); le principe de la méthode strobo-photographique est le suivant :

a) *Emission périodique de gouttelettes* insolubles dans l'eau et de densité égale. Ces gouttelettes, dont les dimensions sont de l'ordre de 1/5 de mm jalonnent une ligne de courant unique et bien déterminée.

(1) Les conditions de permanence de l'écoulement dans le canal m'ont obligé à choisir une hauteur d'eau de 6 cm et d'opérer à une vitesse de l'ordre de 4 cm/sec. Toutes les mesures ont été effectuées la surface restant libre, j'ai vérifié que le fait de fermer le canal par une glace n'a d'autre influence que d'améliorer la permanence du régime d'écoulement.

(2) FASSER a déjà employé un procédé chrono-photographique pour l'étude des champs de vitesse en s'adressant à des gouttelettes en suspension dans l'eau; mais la méthode fournit une infinité de trajectoires dans le champ de l'objectif, chacune occupant évidemment une position arbitraire ce qui constitue un gros inconvénient si on se propose d'étudier une trajectoire définie.

b) *Stroboscopie avec des éclairements brefs*, du train de gouttelettes de façon à les immobiliser sur leur trajectoire.

c) *Inscription photographique* de la ligne de courant ainsi immobilisée et que l'on pourra d'ailleurs déplacer dans le plan de visée de l'objectif photographique (axe optique normal au plan d'écoulement étudié).

L'émission des gouttelettes

Les difficultés essentielles résident dans le choix de la matière des gouttelettes d'une part, et d'autre part dans l'appareil émetteur.

Les gouttelettes doivent posséder un ensemble de propriétés physiques et chimiques assez difficiles à concilier : insolubilité dans l'eau, densité rigoureusement égale, indice de réfraction convenable, stabilité chimique, neutralité chimique vis-à-vis de la conduite de l'appareil émetteur. La question de stabilité prime toutes les autres, l'indice du mélange sera toujours suffisamment différent de celui de l'eau pour permettre le repérage exact sur les clichés photographiques (1). J'ai adopté finalement le mélange binaire *pétrole-tétrachlorure de carbone* qui donne entière satisfaction et qui remplit toutes les conditions demandées. Voici ses caractéristiques :

	Pétrole	*Tétrachlorure*	*Mélange*
Densité	0,80	1,59	1,00
Indice (air)	1,448	1,460	1,45
Indice (eau)	1,086	1,095	1,09
Concentration	60 %	40 %	100 %

Le tétrachlorure est facile à obtenir pur, le pétrole est du type blanc, les deux corps se mélangent très facilement. On s'assure ensuite que la température de l'eau du canal est bien constante et on règle soigneusement la densité du mélange par vérifications successives en ajoutant des quantités très faibles de l'un ou de l'autre des constituants.

L'appareil émetteur doit fonctionner avec un régime périodique réglable, sans pulsation. Le principe de l'appareil est très simple; les gouttelettes sont émises par un gicleur qui est un tube de verre étiré analogue à ceux qui servent à l'émission des filets colorés. Si la pression dans ce tube est suffisamment forte, les gouttelettes sont émises spontanément et elles sont entraînées par le courant.

Mais cette émission naturelle, régulière seulement pour les grandes fréquences, est délicate à régler et elle nécessite une assez grande réserve de liquide. On fait alors régner dans le gicleur une pression légèrement inférieure à celle qui correspond à l'émission naturelle; des surpressions extrêmement petites et de courte durée par rapport à la période, suffisent pour détacher un train très régulier de gouttelettes parfaitement identiques.

---

(1) J'avais d'abord essayé de partir du problème optique en me donnant à l'avance l'indice des gouttelettes de façon à utiliser la lumière réfractée du premier arc-en-ciel; on aurait eu ainsi une déviation totale de la lumière incidente fonction de cet indice et on aurait pu photographier aisément sur fond noir. Avec un mélange ternaire on aurait alors résolu le problème du mélange disposant de 3 équations relatives aux densités, aux concentrations et aux indices (équation de Gladstone). Cette façon de procéder très attrayante au premier examen suppose que l'on a la possibilité d'opérer avec des angles d'incidence rigoureusement déterminés, que le champ d'observation est grand, que le problème chimique enfin est d'ordre secondaire.

Les surpressions périodiques forcées sont produites par l'appareil représenté schématiquement dans la *fig. 25*. Le gicleur T est en communication directe avec un tube vertical V de 8 mm de diamètre intérieur contenant la réserve de liquide et supporté par un chariot E à mouvements rectangulaires pour les déplacements. On arrive ainsi à émettre des gouttelettes dans le plan de visée de l'appareil. Le tube V est mis sous la pression P

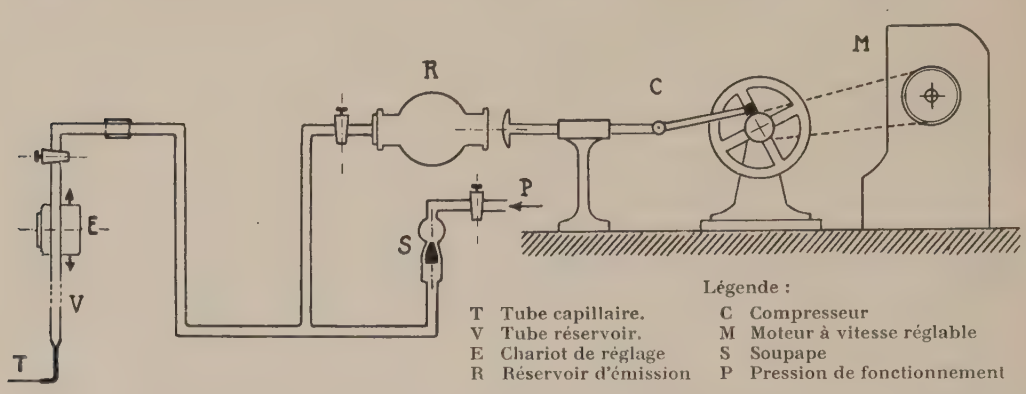


Fig. 25. — Système d'émission de gouttelettes à fréquence variable

convenable par l'intermédiaire d'une colonne d'eau. Une soupape S, placée dans la conduite, empêche la propagation des surpressions vers la colonne d'eau. Un compresseur C à mouvement alternatif, actionné par un moteur à vitesse réglable M, produit les surpressions nécessaires en venant frapper périodiquement la paroi élastique du réservoir d'émission R. Le réglage de la durée (course du marteau du compresseur) et de l'intensité des surpressions (surface de contact du marteau) permet d'obtenir un régime d'émission très stable et dont les perturbations sont négligeables. L'appareil fonctionne particulièrement bien pour des périodes de l'ordre de 1 seconde.

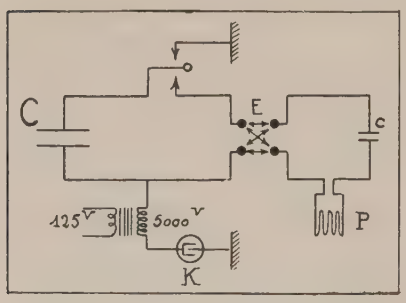


Fig. 26. — Schéma du Stroborama

Stroboscopie

Les éclairements réguliers et synchrones avec l'émission des gouttelettes sont fournis par le projecteur d'un appareil Stroborama (Maison Seguin frères, Paris). Voici en quelques mots ses caractéristiques *(fig. 26)* :

Un éclateur-inverseur E réalise le couplage alterné de deux condensateurs C et *c* de capacités inégales; le grand condensateur est chargé préalablement par un transformateur survolteur 125/5000 volts muni d'un kénotron monoplaque K. L'illumination du projecteur (se faisant à chaque décharge partielle du gros condensateur) a une durée inférieure à $1/10^6$ sec. L'éclateur-inverseur est entraîné par un moteur à vitesse réglable dont le nombre de tours est constant à 5/1000 près. Il y a production de 6 éclairs par tour. Si N est le nombre de tours par minute nous aurons donc :

$$n = \frac{6\,N}{60} = \frac{N}{10} \text{ éclairs/sec.}$$

Pour stroboscoper le train de gouttelettes on choisit une fréquence n appropriée à l'écoulement et on règle une fois pour toutes le nombre de tours de l'éclateur de façon que $N = 10\,n$; par ex. 240. Il faut maintenant adopter la fréquence d'émission des gouttelettes, ou la fréquence des mouvements alternatifs du compresseur qui lui est synchrone; à cet effet, on agit sur le moteur du compresseur de façon à réaliser la stroboscopie de son mouvement. On arrive ainsi à immobiliser complètement toutes les gouttelettes de la trajectoire étudiée puisqu'elles se déplacent entre deux éclairs successifs de l'intervalle qui les sépare. Remarquons que le fait d'obtenir une bonne stroboscopie vérifie simultanément la régularité de l'émission et de l'écoulement. Dans mes expériences l'erreur commise dans la détermination de la fréquence n, à savoir :

$$\frac{\Delta n}{n} \quad \text{est inférieure à} \quad \frac{1}{200}.$$

L'inscription photographique

L'éclairage des gouttelettes est alors réalisé de la façon suivante : l'appareil photographique est mis au point sur le plan de l'écoulement dans lequel je déplacerai le gicleur. La lumière incidente transmise du projecteur est orientée dans le sens de l'axe optique (un montage simple permet de diriger facilement les rayons lumineux). Je photographie donc sur fond blanc (pour photographier sur fond noir il suffit de donner au faisceau lumineux une parallaxe suffisante). Les gouttelettes fonctionnent comme des petits dioptres sphériques dont on observe les caustiques : elles se présentent avec un point central très brillant entouré d'un petit cercle noir.

Avec la lumière très actinique du projecteur (1) la photographie devient particulièrement facile, il suffit d'opérer dans une salle non éclairée, les temps de pose sont de l'ordre de la seconde; ce qui correspond à peu près à 4 impressions successives si $N = 240$. Grâce à la durée extrêmement courte des éclairements, les images des gouttelettes se détachent sur le fond blanc avec une netteté parfaite *(fig. 27)*.

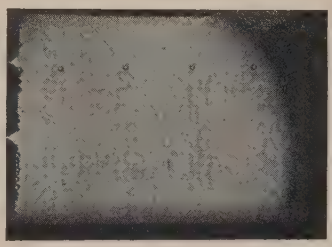


Fig. 27. — Strobo-photographie d'un train de gouttelettes

Le pointé des caustiques se fait au microscope. L'erreur commise dans la détermination de l'intervalle séparant 2 gouttelettes successives (longueur d'onde), intervalle déduit de la longueur d'un train (en tenant compte du rapport de réduction) est inférieur à $\frac{1}{100}$.

Précision de la méthode. — Si V est la vitesse d'écoulement, L la longueur du train, l la longueur d'onde, q le nombre d'intervalles, T la période, n la fréquence, nous aurons :

$$l = \frac{L}{q}$$

$$V = \frac{l}{T} = l.n = \frac{L\,n}{q}$$

(1) Le projecteur est formé par un tube à Xénon. Le spectre de décharge est connu par ses belles raies jaunes, vertes et bleues.

d'où facilement :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta n}{n} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\Delta l}{l} < \frac{1}{100}$$
$$\frac{\Delta n}{n} < \frac{1}{200}$$

d'où une erreur relative de l'ordre de 1%.

Distribution des vitesses dans le canal.

Les résultats des mesures effectuées avec la méthode décrite sont indiqués sur le tableau qui suit et représentés dans la *fig. 28.*

Nous voyons que la distribution des vitesses est quasi-uniforme depuis la surface libre jusqu'à une distance de 20 mm du fond du canal. Puis, nous rentrons dans la couche

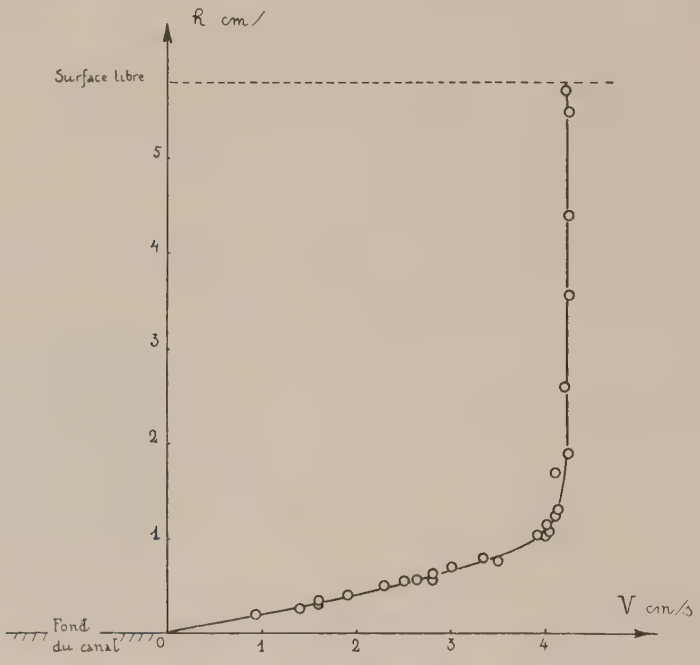


Fig. 28. — Distribution des vitesses dans un canal (Strobo-photographie)

limite (branche parabolique de la courbe, écoulement laminaire); son épaisseur est égale à 1 / 3 de la hauteur d'eau totale. J'ai pu effectuer des mesures jusqu'à 2 mm de la paroi. Au voisinage de la surface libre la décroissance de la vitesse est extrêmement réduite : la vitesse superficielle est de 4,22 cm contre 4,25 cm de la vitesse uniforme au centre du canal.

Phénomène des enroulements.

Plaçons maintenant l'obstacle cylindrique sur le fond du canal. Nous aurons une plage dont l'étendue atteint la valeur asymptotique précédemment définie ($1{,}2\,.\,d$ dans le cas du cylindre circulaire) ainsi que la série des enroulements O_1 O_2..... O_n... allant en s'accumulant vers l'extrémité de cette plage.

TABLEAU NUMÉRIQUE

Strobo-photographie.

Hauteur d'eau : 5,80 cm. Vitesse superficielle : 4,22 cm/sec. Fréquence des étincelles 6.401/600 = 4/sec.

Clichés S	Longueur du train L	Nombre d'intervalles q	Intervalles strobo-scopiques l	Fréquence des éclairs n	Vitesse V	Distance du fond du canal d
S_1	3,04	3	1,01	4	4,04	1,15
	2,60	3	0,886	4	3,48	0,75
S_2	3,15	3	1,05	4	4,20	2,60
	3,18	3	1,06	4	4,24	1,90
	2,96	3	0,986	4	3,94	1,05
S_3	2,50	3	0,833	4	3,33	0,80
	3,04	3	1,01	4	4,04	1,07
	1,41	6	2,35	4	0,94	0,20
S_4	3,06	3	1,02	4	4,08	1,70
	2,07	2	1,035	4	4,14	1,30
	2,11	3	0,703	4	2,81	0,65
	1,52	2	0,760	4	3,04	0,70
S_5	1,91	4	0,477	4	1,91	0,40
	1,60	4	0,400	4	1,60	0,30
	2,09	3	0,693	4	2,77	0,55
	1,76	5	0,352	4	1,41	0,25
S_6	2,43	6	0,405	4	1,62	0,35
	2,25	4	0,562	4	2,25	0,50
	1,98	3	0,662	4	2,65	0,55
S_7	4,12	4	1,03	4	4,12	1,22
	2,01	2	1,00	4	4,00	1,02
S_8	2,10	2	1,05	4	4,20	5,70
	3,17	3	1,06	4	4,24	5,50
	3,20	3	1,065	4	4,26	4,40
	3,18	3	1,06	4	4,24	3,55
	1,88	3	0,625	4	2,50	0,55

Localisation des enroulements. — Matérialisons l'enroulement O_1 de la série (le plus éloigné de la glace) avec un filet coloré émis dans le plan de symétrie vertical, assez loin en amont pour que la distribution des vitesses ne soit pas encore modifiée par la présence de l'obstacle. Il existe naturellement une zone comprise entre deux filets singuliers du type $S_1 S'_1$ (voir chapitre II) qui correspond aux particules fluides participant à cet enroulement; tandis que la couche limite a une épaisseur de 20 mm, les cotes des branches horizontales des lignes singulières sont respectivement 9 mm et 4 mm. L'enroulement O_1 et à fortiori les autres sont donc formés par des filets qui proviennent des régions de la couche limite non perturbée par l'obstacle.

Un filet émis au contraire dans une région du plan de symétrie où la vitesse est uniforme ne participe plus au phénomène des enroulements. L'écoulement se fait par couches parallèles au fond du canal quand nous atteignons la mi-hauteur d'eau. Le phénomène des enroulements est donc bien dû à l'état particulier de la distribution des vitesses et ce n'est autre chose qu'une manifestation de la viscosité du fluide réel. Si ce dernier était parfait les différentes couches glisseraient au contraire les unes sur les autres : c'est l'hypothèse que j'ai faite au début du chapitre II.

Passage du domaine des enroulements à la partie de l'écoulement à vitesse uniforme. — Il s'agit pourtant encore de déterminer comment évolue l'ensemble du phénomène quand nous partons de l'expérience décrite au chapitre II (écoulement entre glaces parallèles) pour arriver à un écoulement partiellement cylindrique.

1° Entre glaces parallèles la distribution des vitesses est rigoureusement parabolique avec le débit employé (écoulement de Poiseuille). Il y a dans ce cas, comme nous le savons, une ligne singulière médiane (dans le plan de symétrie vertical) et qui est la position unique pour laquelle un filet fluide réussira à toucher l'obstacle : il y existe un point de stagnation avec épanouissement radial. Un filet voisin en s'approchant de l'obstacle s'infléchit vers la glace pour former la plage. Puis nous quittons ce premier domaine pour entrer dans celui qui correspond au premier enroulement O_1, etc...

Augmentons maintenant le débit de façon que la distribution des vitesses commence à devenir uniforme dans les couches centrales du tunnel; cela se traduit par un début de palier sur la courbe des vitesses. Corrélativement la ligne singulière médiane se scindra en deux, donnant ainsi naissance à une nouvelle région, centrale, dont les particules descendent constamment le courant; les trajectoires sont horizontales sauf au voisinage des deux frontières de séparation qui se sont abaissées en direction des 2 bases de l'obstacle. L'épaisseur de cette région centrale à vitesse uniforme augmente avec le débit de l'écoulement, les 2 zones striées des enroulements sont comprimées contre les 2 glaces.

2° Dans le canal ouvert la distribution des vitesses est uniforme loin du fond. L'écoulement se fait par couches parallèles depuis la surface libre (1) jusqu'à la couche limite. Puis les filets commencent à s'incliner vers le fond du canal; mais sans changer d'aspect. Ensuite nous traversons la première ligne singulière (non plane) dirigée vers le pied de l'obstacle et les filets prennent maintenant part au phénomène des enroulements avec toutes ses particularités.

(1) Près de la surface libre et au voisinage de l'obstacle il y a un phénomène compliqué supplémentaire : la stagnation de l'eau par l'obstacle créé un déferlement des filets fluides et un commencement de tourbillonnement.

La zône de passage de la région centrale à vitesse uniforme au domaine des enroulements est assez instable, les filets fluides éprouvent des fluctuations, ce n'est que dans les enroulements que l'écoulement reprend sa permanence.

Décollement.

Nous avons vu dans le chapitre III relatif à l'étude générale du décollement que toutes les propriétés de la ligne de décollement (entre glaces parallèles) se rapprochent sensiblement de celles du cas cylindrique théorique (génératrices de décollement disposées aux azimuts de 82°). La détermination des angles effectuée avec les hauteurs d'eau de 5 cm, 10 cm et 15 cm a en effet fourni une courbe limite des angles de décollement qui

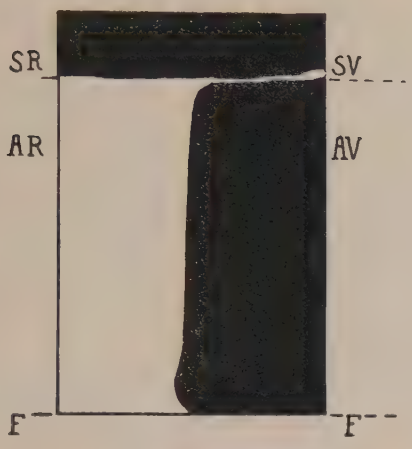
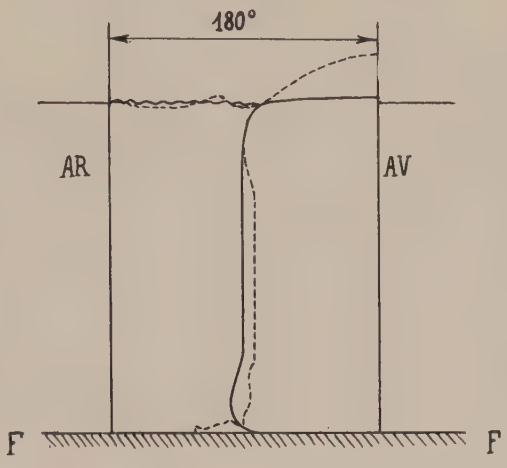


Fig. 29. — Décollement sur un cylindre (Méthode de l'iode)



Courbe —— $V_s = 4{,}22$ cm/s
Courbe - - - $V_s = 20$ cm/s

Fig. 30. — Évolution de la ligne de décollement avec la vitesse d'écoulement

tend elle-même asymptotiquement, pour les vitesses croissantes, vers cette valeur théorique. Ces expériences ont montré d'autre part que la ligne de décollement est disposée le long d'une génératrice du cylindre, sauf aux environs immédiats du fond du canal et de la surface libre.

J'ai voulu tout d'abord déterminer d'une façon précise l'allure de cette ligne de décollement par l'emploi de la méthode de l'iode. La *fig. 29* montre le résultat obtenu en injectant la solution d'iode dans le sillage du cylindre (vitesse superficielle de l'écoulement égale à 4,22 cm/sec correspondant à la mesure de la distribution de vitesses indiquée). Le développement de la surface latérale du cylindre montre la trace de l'écoulement entre la génératrice amont AV et la génératrice aval AR. Nous distinguons trois parties distinctes :

1° La partie centrale de la ligne de décollement, rectiligne et dirigée suivant une génératrice du cylindre (D ou D'); elle correspond aux couches de l'écoulement à vitesse uniforme, loin de la surface libre et en dehors de la couche limite du fond. L'angle de décollement déduit des dimensions géométriques a une valeur de 91°; en utilisant la courbe des décollements mesurés (chapitre III) nous trouvons pour cette vitesse, $\theta = 91°{,}50$.

2° En remontant vers la surface libre la ligne de décollement quitte la génératrice en s'incurvant légèrement contre le courant (diminution du décollement). Quelques gouttes d'iodure émises à la surface et en amont de l'obstacle tracent très nettement la ligne de stagnation SV. (Cette ligne quitte de très peu le plan horizontal étant donné la valeur faible de la vitesse d'écoulement). Elle se prolonge dans la région du sillage par une ligne d'allure irrégulière SR horizontale en moyenne.

3° En nous rapprochant enfin de la glace du fond la ligne de décollement présente un coude trés marqué et qui est l'analogue de ce que j'ai montré dans l'écoulement correspondant entre glaces parallèles à distribution parabolique de vitesse. Le gradient des vitesses a donc pour effet d'augmenter la valeur de l'angle de décollement en s'éloignant de la paroi.

Évolution du phénomène avec la vitesse. — Tandis que la disposition des enroulements ne change guère en fonction de la vitesse, l'angle de décollement subit une variation continue, mais très rapide. Nous voyons également défiler les différents régimes d'écoulement. Mais la ligne de décollement et la ligne de stagnation évoluent : la première reste évidemment rectiligne dans sa partie centrale *(fig. 30)* et elle conserve toute sa netteté; au voisinage de la surface libre elle s'incurve en aval par suite du déferlement des filets fluides provenant du point de stagnation, au voisinage du fond elle est plus irrégulière et moins nette; cela est dû à l'augmentation de la vitesse d'une part et d'autre part à la modification de la couche limite.

Théorie élémentaire de la genèse des plages et des enroulements.

Considérons un écoulement dirigé parallèlement à un plan F dont je représente la trace APO dans la *fig. 31* et soit un obstacle C posé sur ce plan (cylindre de révolution

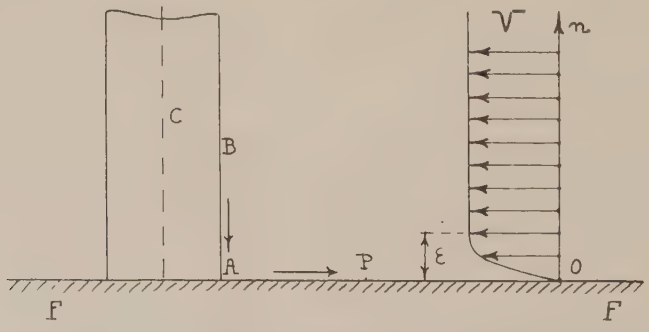


Fig. 31. — Formation des plages et des enroulements

dans un but simplificateur) supposons le regime permanent établi, et soit la distribution des vitesses $V = f(n)$ le long d'une normale n choisie loin de l'obstacle. Nous venons de voir les propriétés essentielles de la fonction V déterminée expérimentalement; ε étant l'épaisseur de la couche limite nous avons :

$$\frac{dV}{dn} = 0 \qquad \text{si} \quad n > \varepsilon$$

$$\frac{dV}{dn} = \text{Cte} \qquad \text{si} \quad n < \varepsilon$$

$$V = 0 \qquad \text{si} \quad n = 0 \text{ (adhérence à la paroi F).}$$

Imaginons un instant que l'écoulement se fasse par couches parallèles et en particulier près de l'obstacle. Il y aurait alors une ligne de bifurcation allant depuis le fond du canal jusqu'à la surface libre (génératrice amont); il est facile de calculer dans ce cas la répartition des pressions le long de cette ligne par application du théorème de Bernouilli :

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 + p_0 = \frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_1$$

l'indice $_0$ caractérisant les paramètres pris loin de l'obstacle, l'indice $_1$ caractérisant au contraire les éléments choisis sur l'obstacle.

Or, $V_1 = 0$, il y aura donc :

$$p_1 = \frac{1}{2}\rho V_0^2 + p_0 \qquad \text{avec} \qquad V_0 = f(n)$$

d'où :

$$p_1 = \frac{1}{2}\rho [f(n)]^2 + p_0 = g(n).$$

Il en résulte que lorsqu'on se rapproche du plan F, la distribution de pression p_1 le long de la ligne de bifurcation n'est pas égale à celle de la pression statique p_0, l'écoulement ne saurait donc être permanent. Une telle distribution représenterait au contraire le phénomène non permanent de l'établissement de l'écoulement.

L'équilibre statique n'étant pas réalisé pour les molécules supposées au repos, près du plan F la chute de pression engendrera un mouvement secondaire du fluide vers le pied de l'obstacle, et qui n'est autre chose qu'un transport de fluide des régions à forte pression vers les régions à pression plus faible. Il est facile de confirmer cette conclusion par une expérience très simple : En écartant le cylindre du plan F de façon à le soustraire complètement à l'influence de la couche limite le mouvement se fait de nouveau par couches parallèles.

L'écoulement secondaire du fluide le long de la génératrice entraîne forcément les particules fluides voisines et il se produit une déviation d'ensemble des filets fluides vers le pied de l'obstacle. A partir de ce point les particules s'étalent le long du plan F en rencontrant des couches animées d'une vitesse contraire (sens général de l'écoulement). Le fluide refoulé s'épanouit en nappe à droite et à gauche du plan de symétrie; c'est ce que j'ai appelé la plage dans le phénomène des enroulements.

Nous sommes donc en présence de deux courants fluides juxtaposés et de vitesses contraires :

1° Le courant général se dirigeant vers l'obstacle;

2° Le courant de la plage remontant le plan F.

C'est entre ces deux courants antagonistes que se produit la série des enroulements.

Remarquons enfin pour terminer ce chapitre que l'écoulement au voisinage du plan F sur lequel repose l'obstacle peut être regardé comme la conséquence d'un phénomène de décollement localisé au point P, extrémité de la plage. La couche limite, que j'ai déterminée loin et en amont de l'obstacle, décolle du plan F au point P, l'ensemble des enroulements jouant le rôle de sillage dans un phénomène de décollement habituel.

Si l'analogie peut être consolidée par l'existence du renversement du profil des vitesses au voisinage du point P, il faut cependant ajouter qu'il n'existe aucune ligne de décollement et que le phénomène est compliqué par le réseau de lignes singulières.

CHAPITRE V

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES

Partie A

SUR LA SIMILITUDE DES ÉCOULEMENTS ENTRE GLACES PARALLÈLES

Généralités.

Les considérations élémentaires sur la similitude concernant les écoulements autour d'obstacles cylindriques serrés entre glaces parallèles, basés directement sur les résultats des recherches sur les particularités de ces mouvements (phénomènes des enroulements et décollements), ne prétendent nullement à un caractère définitif, d'autant plus que je ne tiens pas compte de tous les paramètres dont dépend le problème visé.

Ces considérations présentent néanmoins un certain intérêt immédiat, puisqu'elles conduisent à des résultats dont l'accord avec l'expérience est très satisfaisant, en première approximation tout au moins, et qu'elles jettent un pont théorique entre les écoulements en couches très minces du type de Stokes et les écoulements cylindriques qui en constituent un cas limite (glaces parallèles infiniment écartées).

On sait que d'une manière générale on aura similitude dynamique entre deux écoulements, la similitude géométrique étant supposée réalisée, lorsqu'en des points homologues il y a proportionnalité entre les forces intéressant l'écoulement; ces forces (dont l'équilibre est exprimé dans les équations de Navier), sont les suivantes :

Forces de frottement	F
Forces d'inertie	I
Gradient des forces de pression	P′

On trouve par un calcul classique que cette condition est remplie, quand l'expression suivante, appelée *Nombre de Reynolds*, est constante :

$$\mathcal{R} = \frac{V.\lambda.\rho}{\mu}$$

où V est la vitesse d'écoulement du fluide;
λ » une longueur caractéristique de l'écoulement;
ρ » la masse spécifique du fluide;
μ » le coefficient de viscosité.

1° Application élémentaire de la loi de similitude aux écoulements entre glaces parallèles.

Ayant rappelé les origines et la validité de la loi de similitude, considérons les écoulements particuliers que nous venons d'étudier expérimentalement, c'est-à-dire les écoulements autour d'obstacles cylindriques placés entre glaces parallèles.

Les grandeurs que nous avons mesurées sont :

a) Dimensions géométriques y du phénomène des enroulements (coordonnées des noyaux tourbillonnaires, dimension longitudinale des plages);

b) Les angles de décollement;

c) Les vitesses du changement de régime.

Chacune de ces grandeurs est une fonction des paramètres du problème et qui sont dans ce cas :

La vitesse moyenne de l'écoulement V;

Le diamètre de l'obstacle d;

L'écartement des glaces h.

Le coefficient de viscosité restant constant dans mes expériences comme j'ai déjà eu l'occasion de le mentionner plus haut, je ne tiendrai pas compte de son influence. Aussi, quand j'aurai à former le nombre de Reynolds $\mathcal{R} = \frac{V\lambda\rho}{\mu}$ je considèrerai simplement le nombre réduit $R = V\lambda = \mathcal{R}\,\frac{\mu}{\rho}$. J'étudierai en particulier la fonction y caractérisant l'étendue de la plage. Nous aurons donc : $y = f\,(V, d, h)$.

Cette fonction f n'est d'ailleurs pas arbitraire et nous connaissons déjà certaines de ses propriétés, par l'étude du phénomène des enroulements du chapitre II. On a :

1° Les dérivés partielles de f.

$$\frac{\partial f}{\partial V} > 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial d} > 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial h} > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} \to 0 \quad \text{si} \quad V \to \infty, \qquad \frac{\partial f}{\partial h} \to 0 \quad \text{si} \quad h \to \infty.$$

2° Limite de la fonction :

Si V et h tendent vers 0, f tend elle-même vers 0.

Si V ou h augmentent indéfiniment f tend vers une valeur limite qui est directement proportionnelle au diamètre d. Nous avons trouvé en effet la relation simple :

$$\text{limite de } \quad y = 1{,}2.\ d.$$

Je considérerai donc à la place de la fonction y le rapport $\frac{y}{d}$ qui exprime la valeur relative de la plage (valeur sans dimension); nous aurons alors :

$$\frac{y}{d} = \varphi\,(V, d, h).$$

Il est facile de déduire des mesures effectuées sur la fonction y les valeurs de la nouvelle fonction $\frac{y}{d}$; ce sont les nombres indiqués dans les tableaux numériques à

droite des valeurs représentant y. Prenons en particulier le tableau des mesures pour l'écartement $h = 2{,}05$ cm (page 22); h étant constant nous aurons :

$$\frac{y}{d} = \varphi\,(\mathrm{V}\ d)_{h_0 = 2{,}05}$$

nous constaterons aisément, soit en comparant directement les valeurs de $\frac{y}{d}$, soit en traçant les courbes correspondantes, que la fonction ne dépend pas du nombre de Reynolds; il y a au contraire un écart systématique quand le diamètre varie.

Exemple :

$$a)\quad \left.\begin{matrix} d = 1 \\ \mathrm{V} = 1 \end{matrix}\right\} \quad \mathrm{R} = \mathrm{V}d = 1 \qquad y = 0{,}65 \qquad \frac{y}{d} = 0{,}65$$

$$b)\quad \left.\begin{matrix} d = 4 \\ \mathrm{V} = 0{,}25 \end{matrix}\right\} \quad \mathrm{R} = \mathrm{V}d = 1 \qquad y = 0{,}75 \qquad \frac{y}{d} = 0{,}19$$

Les valeurs numériques de $\frac{y}{d}$ sont donc différentes (dans le rapport 1/3) pour les mêmes nombres de Reynolds réalisés pour les deux obstacles. Nous constatons d'une façon plus précise que le cylindre le plus grand est en retard sur l'autre, autrement dit que la diminution de l'allongement $\frac{h}{d}$ contribue à la décroissance de la fonction φ. (J'ai constaté des divergences analogues pour les vitesses de changement de régime d'écoulement, toutefois le problème est beaucoup plus compliqué.) L'expression φ n'est donc pas une fonction du nombre de Reynolds; ce dernier, en choisissant comme longueur caractéristique le diamètre de l'obstacle, ne suffit plus à fixer les propriétés des écoulements entre glaces parallèles. Cette conclusion ne nous surprend pas, la similitude géométrique ne pouvant être réalisée pour deux cylindres différents placés dans le même tunnel hydrodynamique.

La vérification de la loi de Reynolds ne pourrait être entreprise avec succès que pour des cylindres de même allongement.

Vérification de la loi de similitude. — Cette constatation nous amène à représenter l'ensemble des mesures effectuées avec les différents écartements des glaces : se superposeront les courbes pour lesquelles $\alpha = \frac{h}{d} =$ constante *(fig. 32)*.

Nous voyons que l'hypothèse est entièrement vérifiée. Ainsi la courbe $\frac{h}{d} = 2$ est définie par l'ensemble des points correspondants aux mesures effectuées avec :

le cylindre	$d = 4$ cm	dans le tunnel	$h = 2{,}05$ cm
«	« 2 cm	«	« 1,02 cm
«	« 1 cm	«	« 0,51 cm
«	« 0,50 cm	«	« 0,27 cm

En somme cette façon de procéder permet de condenser en une famille de courbes une série de mesures effectuées dans des conditions différentes, chaque courbe $\frac{y}{d} = \varphi\,(\mathrm{V}, d, h)_x$ correspondant à une valeur bien définie de l'allongement. Cette représen-

tation graphique montre d'ailleurs très clairement l'évolution du phénomène des enroulements : la valeur asymptotique est approchée d'autant plus rapidement, un certain nombre de Reynolds étant donné, que l'allongement est plus grand. Pour les écoulements quasi-cylindriques cette valeur est pratiquement atteinte quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds (mesures effectuées dans le canal ouvert).

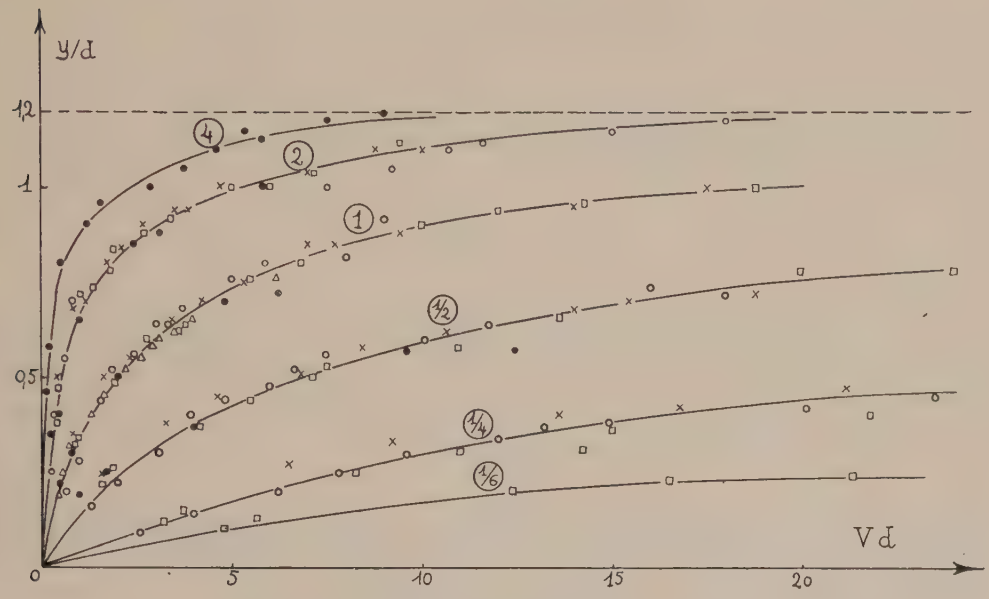


Fig. 32. — Variations des valeurs relatives des plages en fonction du nombre de Reynolds pour différents allongements des obstacles $y/d = \varphi\,(Vd)_{\alpha}$

2° Généralisation de la loi de similitude.

L'étude élémentaire précédente nous a montré que chaque allongement $\frac{h}{d}$ défini un problème bien déterminé et que si cet allongement varie toutes les propriétés de l'écoulement évoluent. Je vais montrer par l'étude de la fonction φ, malgré l'absence de similitude géométrique constatée, que nous arrivons à construire un lien mathématique entre ces écoulements en apparence très différents les uns des autres.

Reprenons le graphique des fonctions $\frac{y}{d}$ *(fig. 32)*. Toutes les courbes de cette famille partent de l'origine 0 et tendent asymptotiquement vers la droite : $\frac{y}{d} = 1{,}2$. L'allure générale de ces courbes est très sensiblement celle d'une famille d'hyperboles d'équation $Y = 1{,}2\,\frac{R}{R + a}$.

Un travail graphique élémentaire montre que la concordance est satisfaisante. Dans l'équation ci-dessus le coefficient a est une fonction de l'allongement α des obstacles. Nous aurons par conséquent :

$$a = g\left(\frac{h}{d}\right).$$

Il est facile de constater que le coefficient a est inversement proportionnel au carré de l'allongement, en première approximation tout au moins :

$$a = \frac{k}{\alpha^2} = \frac{k}{\left(\frac{h}{d}\right)^2}.$$

Nous aurons donc en définitive :

$$\frac{y}{d} = 1{,}2\,\frac{R}{R + a} = 1{,}2\,\frac{R}{R + k\,\frac{d^2}{h^2}} = 1{,}2\,\frac{V\,d}{Vd + k\,.\,\frac{d^2}{h^2}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\frac{h^2}{d^2}$ il vient :

$$\frac{y}{d} = 1{,}2\,\frac{V\,\frac{h^2}{d}}{V\,\frac{h^2}{d} + k}.$$

Cette formule condense parfaitement les propriétés fondamentales de la fonction $\frac{y}{d}$; la valeur asymptotique 1,2 sera d'autant plus vite atteinte que la variable

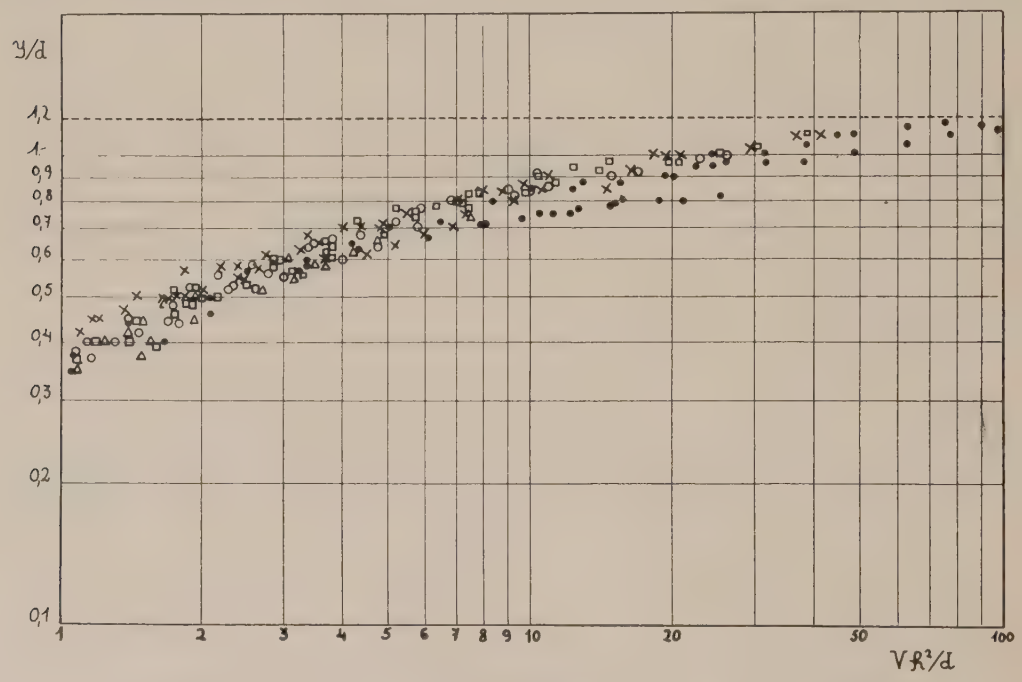


Fig. 33. — Variation des valeurs relatives des plages en fonction du nombre Vh^2/d.

$V.\frac{h^2}{d}$ est plus grande. On se rapproche des propriétés des écoulements cylindriques si $\frac{h^2}{d}$ est grand, et on atteint au contraire les écoulements de Stokes si $\frac{h^2}{d}$ est petit. Pour un écoulement entre glaces parallèles, les paramètres étant V, h, d, la variable fondamentale est : $V\,\frac{h^2}{d}$, le rapport $\frac{h^2}{d}$ ayant les dimensions d'une longueur.

Représentons donc la fonction $\frac{y}{d}$ avec cette nouvelle variable indépendante, en portant en abcisses $\log \mathrm{V}\frac{h^2}{d}$ et en ordonnées $\log \frac{y}{d}$, *(fig. 33)* :

$$1 < \mathrm{V}\frac{h^2}{d} < 100$$

$$0{,}1 < \frac{y}{d} < 1{,}2.$$

L'ensemble des points représentatifs pour des allongements variant depuis 1/6 jusqu'à 4 est groupé le long d'une courbe d'allure hyperbolique partant naturellement de l'origine des coordonnées $\left(\frac{y}{d} = 0 \text{ pour } \mathrm{V}\frac{h^2}{d} = 0\right)$ et admettant comme asymptote la droite $\frac{y}{d} = 1{,}2$.

Ce résultat confirme donc amplement nos prévisions de généralisation. (J'ai essayé de vérifier la loi en étudiant également les vitesses critiques de changement de régime, toutefois, le phénomène, comme je l'ai déjà dit, est beaucoup plus compliqué. Il faudrait, pour résoudre le problème, reprendre les mesures des angles de décollement en faisant varier le diamètre des cylindres, ce qui m'aurait fait sortir du cadre de mes recherches).

3° Extension de la notion de nombre de Reynolds. Lien mathématique entre les écoulements en couches minces et les phénomènes cylindriques.

Nous venons de trouver l'expression mathématique de l'évolution des plages :

$$\frac{y}{d} = 1{,}2\,\frac{\mathrm{V}\frac{h^2}{d}}{\mathrm{V}\frac{h^2}{d} + k}.$$

Nous avons vu que par le fait d'augmenter l'allongement des obstacles, on se rapproche des écoulements cylindriques; tout se passe comme si le nombre de Reynolds était plus grand. D'une façon plus précise, c'est la longueur caractéristique λ qui se trouve augmentée, toutes choses égales d'ailleurs.

Or, la fonction y est également croissante avec l'allongement. En conséquence, nous choisissons comme longueur caractéristique λ de l'écoulement la quantité : $\frac{y}{1{,}2}$.

ce qui donne :

$$\lambda = \frac{y}{1{,}2} = d\,\frac{\mathrm{V}\frac{h^2}{d}}{\mathrm{V}\frac{h^2}{d} + k}$$

d'où :

$$\mathrm{R} = \mathrm{V}\lambda = \mathrm{V}d\,\frac{\mathrm{V}\frac{h^2}{d}}{\mathrm{V}\frac{h^2}{d} + k}.$$

Si la variable $V\frac{h^2}{d}$ augmente indéfiniment (vitesse ou allongement grands), le nombre $V\lambda$ tend vers la valeur limite Vd, c'est-à-dire vers le nombre de Reynolds du phénomène cylindrique.

Si la variable $V\frac{h^2}{d}$ diminue (vitesses faibles ou allongements réduits) le nombre $V\lambda$ devient lui-même très petit; c'est un résultat qui est en parfait accord avec l'expérience.

Nous avons trouvé :

$$R = Vd\,\frac{V\frac{h^2}{d}}{V\frac{h^2}{d} + k} = \frac{V^2 h^2}{V\frac{h^2}{d} + k}.$$

D'où facilement :

$$\frac{1}{R} = \frac{V\frac{h^2}{d} + k}{V^2 h^2} = \frac{1}{Vd} + \frac{k}{V^2 h^2}.$$

Or : Vd est le nombre de Reynolds réduit du cylindre infiniment allongé, soit R_∞
Vh « « « du tunnel à glaces parallèles, soit R_T.
$V\lambda$ « « « de l'obstacle limité, soit R.

Nous avons donc la loi que l'inverse du nombre de Reynolds de l'ensemble obstacle + glaces est égal à la somme des inverses du nombre de Reynolds du cylindre infiniment allongé et du carré du nombre de Reynolds du tunnel à glaces parallèles :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_\infty} + \frac{k}{(R_T)^2}.$$

Valeur numérique de k.

D'après les expériences faites dans l'eau j'ai trouvé sensiblement la valeur 3 pour la constante k définie ci-dessus. Étant donné que nous avons fait ce calcul dans un système d'unités particulier (C. G. S.) et que nous nous sommes servi des nombres de Reynolds réduits, la formule ci-dessus n'est valable que dans ce système et dans les conditions particulières de l'expérience $\left(\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0{,}0124\right)$.

Si on voulait une formule valable dans n'importe quel système d'unités et applicable à un écoulement quelconque, il faudrait l'écrire ainsi :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_\infty} + \frac{240\,.\,\nu}{(R_T)^2}$$

ou encore, si on préfère se servir des nombres de Reynolds eux-mêmes :

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_\infty} + \frac{240}{(\mathcal{R}_T)^2}.$$

Cette formule empirique très simple, résume l'ensemble des résultats exposés et relie un écoulement entre glaces parallèles à l'écoulement cylindrique correspondant :

Si le nombre $\mathcal{R}_T$ est petit (glaces rapprochées)
le nombre $\mathcal{R}$ est très inférieur au nombre $\mathcal{R}_\infty$.

Si le nombre $\mathcal{R}_T$ est au contraire grand (glaces très écartées)
le nombre $\mathcal{R}$ est très voisin du nombre $\mathcal{R}_\infty$.

Partie B

RECHERCHES THÉORIQUES SUR LES FILES ET LES RUES DE PUITS-TOURBILLONS

But des recherches.

Je viens de montrer qu'il existe en amont d'un obstacle cylindrique placé entre glaces parallèles (ou limité par un plan unique) une série d'enroulements et de points de vitesse nulle, constituant un phénomène de caractère absolument général. Nous connaissons particulièrement cet écoulement dans son plan de symétrie vertical V. Nous savons qu'au voisinage d'un centre d'enroulements O les particules fluides suivent des trajectoires en spirales pour s'approcher de ce centre; tout se passe comme si le fluide y était aspiré. La comparaison qui s'impose immédiatement est celle d'un puits-tourbillon. Les lignes de courant sont des spirales logarithmiques, l'exemple vulgaire se produit dans la vidange par un orifice d'un réservoir rempli d'eau.

En partant de cette hypothèse initiale, je me suis proposé de résoudre par la voie de la théorie le problème suivant :

Construire une file de puits-tourbillons (phénomène cylindrique) et déterminer ses analogies avec l'écoulement du phénomène naturel dans la section obtenue par le plan V. Il est bien entendu que dans la réalité les différents centres d'enroulements s'accumulent vers un certain point et les enroulements diminuent d'importance au fur et à mesure que leur ordre va en croissant. Aussi, dans un but simplificateur, ai-je étudié des files de puits-tourbillons illimitées, à intensités constantes et à intervalles égaux. Rien n'empêchera, le problème résolu, d'adapter la configuration ainsi trouvée au cas de l'écoulement réel.

Ce programme fixé, il y aura deux questions distinctes à approfondir :

1° *Cas de la file de puits-tourbillons unique.* — Nous pouvons prévoir à priori que ses différents noyaux sont des centres de symétrie.

2° *Cas de la rue de puits-tourbillons symétrique.* — Dans ce cas il y aura au contraire un axe de symétrie (axe de la rue).

File de puits-tourbillons unique.

Considérons une file de tourbillons régulièrement espacés sur l'axe des x (espacement égal à l) et d'intensité constante I *(fig. 34)*.

Le potentiel complexe de cette file s'écrira :

$$f_i = \frac{\mathrm{I}}{2i\pi} \cdot \mathrm{L}\,\Pi_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0 - kl)$$

en posant $z_0 = 0$, il vient (à une constante près) :

$$f_i = \frac{\mathrm{I}}{2i\pi}\,\mathrm{L}\,\Pi_{-\infty}^{+\infty} (z - kl) = \frac{\mathrm{I}}{2i\pi} \cdot \mathrm{L}\sin\left(\frac{\pi}{l} z\right).$$

Superposons à chaque tourbillon de cette file un puits d'intensité A. Comme ci-avant et par un calcul semblable le potentiel complexe sera :

$$f_p = \frac{A}{2\pi} \cdot L \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right).$$

D'où le potentiel complexe de l'ensemble :

$$f = f_t + f_p = \frac{I}{2i\pi} \cdot L \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right) + \frac{A}{2\pi} \cdot L \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right).$$

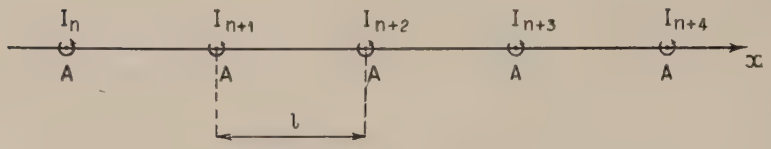


Fig. 34. — File de puits-tourbillons

Pour construire cet écoulement on a intérêt à s'adresser à la méthode des champs diagonaux qui a l'avantage de réserver par la suite les possibilités de combiner les écoulements dont les paramètres peuvent changer. La construction des graphiques des deux écoulements élémentaires ne présentent aucune difficulté.

a) Tourbillons

$$f_t = \varphi + i\psi = \frac{I}{2i\pi} L \sin \frac{\pi}{l} z = \frac{I}{2i\pi} \cdot L \sin \frac{\pi}{l} (x + iy)$$

$$\overline{f_t} = \varphi - i\psi = -\frac{I}{2i\pi} L \sin \frac{\pi}{l} \bar{z} = -\frac{I}{2i\pi} \cdot L \sin \frac{\pi}{l} (x - iy)$$

d'où :

$$\psi = \frac{1}{2i} (f_t - \overline{f_t}) = -\frac{I}{4\pi} L \left[\sin \frac{\pi}{l} (x + iy) \cdot \sin \frac{\pi}{l} (x - iy)\right]$$

or :

$$\sin \frac{\pi}{l} (x + iy) \cdot \sin \frac{\pi}{l} (x - iy) = \sin^2 \frac{\pi x}{l} \cdot Ch^2 \frac{\pi y}{l} + \cos^2 \frac{\pi x}{l} \cdot Sh^2 \frac{\pi y}{l}$$

d'où :

$$\psi = -\frac{4\pi}{I} L \left[\sin^2 \frac{\pi x}{l} \cdot Ch^2 \frac{\pi y}{l} + \cos^2 \frac{\pi x}{l} \cdot Sh^2 \frac{\pi y}{l}\right]$$

$$= -\frac{I}{4\pi} L \left[\left(1 - \cos^2 \frac{\pi x}{l}\right) Ch^2 \frac{\pi y}{l} + \cos^2 \frac{\pi x}{l} \left(Ch^2 \frac{\pi y}{l} - 1\right)\right]$$

$$= -\frac{I}{4\pi} L \left[Ch^2 \frac{\pi y}{l} - \cos^2 \frac{\pi x}{l}\right] = -\frac{I}{4\pi} L \left[\frac{1}{2} \left(Ch \frac{2\pi y}{l} - \cos \frac{2\pi x}{l}\right)\right].$$

Posons $l = 2\pi$, nous aurons alors :

$$\psi = -\frac{I}{4\pi} L \left[\frac{1}{2} (Ch\, y - \cos x)\right] = Cte = -n.$$

C'est l'équation des lignes de courant de la file de tourbillons. Nous aurons finalement :

$$Ch\, y - \cos x = 2\, e^{\frac{4\pi n}{I}} = e^{L2 + \frac{4\pi n}{I}}.$$

Le réseau des lignes admet l'axe des x comme axe de symétrie. L'ensemble est périodique (période 2π). L'écoulement est donc constitué de tranches parallèles d'écartement $l = 2\pi$.

Nous calculons facilement la vitesse complexe $u - iv$:

$$u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\frac{I}{2i\pi} \cdot L \sin \frac{\pi}{l} z\right] = \frac{I}{2i\pi} \cdot \frac{\pi}{l} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{l} z\right) = \frac{I}{2il} \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{l} z\right).$$

Les points de vitesse nulle seront donnés par la relation :

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{l} z\right) = 0 \qquad \text{où} \qquad \frac{\pi}{l} z = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

or $l = 2\pi$, d'où :

$$\frac{\pi}{l} z = \frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

donc z est réel :

$$z = \pi + 2k\pi.$$

Les points de vitesse nulle sont donc placés au milieu des intervalles séparant les tourbillons; c'est par ces points que passent les lignes singulières qui délimitent les tourbillons du reste du fluide. Il est d'ailleurs facile de voir que dans l'équation :

$$Ch\, y - \cos x = e^{L2 + \frac{4\pi n}{I}}$$

la constante n est nulle pour les lignes singulières.

$u - iv = 0$ pour $y = 0$, $x = \pi + 2k\pi$ d'où : $Ch\, y = 1$, $\cos x = -1$

D'où : $2 = e^{L2 + \frac{4\pi n}{I}}$ ce qui donne : $n = 0$.

J'ai déterminé les lignes de courant en les calculant point par point avec $I = 8\pi$.

Remarquons que cette file de tourbillons induit à l'infini une vitesse finie donnée par la formule :

$$\lim_{y=+\infty} [u - iv] = \lim_{y=+\infty} \left[\frac{I}{2il} \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{l} z\right)\right] = \frac{I}{2il}(-i) = -\frac{I}{4\pi} = -2.$$

b) Puits

Un calcul analogue donne :

$$f_p = \varphi + i\psi = \frac{A}{2\pi} L \sin \frac{\pi}{l} z = \frac{A}{2\pi} L \sin \frac{\pi}{l} (x + iy)$$

$$= \frac{A}{2\pi} L \left[\sin \frac{\pi x}{l} \cdot Ch \frac{\pi y}{l} + i \cos \frac{\pi x}{l} \cdot Sh \frac{\pi y}{l}\right].$$

Posons :

$$\sin \frac{\pi x}{l} \cdot \mathrm{Ch} \frac{\pi y}{l} = a$$

$$\cos \frac{\pi x}{l} \cdot \mathrm{Sh} \frac{\pi y}{l} = b$$

nous aurons :

$$f_p = \varphi + i\psi = \frac{\mathrm{A}}{2\pi} \mathrm{L}\,(a + i\,b).$$

Posons :

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

d'où :

$$f_p = \varphi + i\psi = \frac{\mathrm{A}}{2\pi} \mathrm{L}\,(\rho \cdot e^{i\theta}) = \frac{\mathrm{A}}{2\pi} [\mathrm{L}\rho + i\theta]$$

d'où l'expression de ψ :

$$\psi = \frac{\mathrm{A}}{2\pi} \theta = \frac{\mathrm{A}}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \frac{\mathrm{A}}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{l} \cdot \mathrm{Th} \frac{\pi y}{l} \right).$$

Les lignes de courant seront donc données par l'équation :

$$\frac{\mathrm{A}}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{l} \cdot \mathrm{Th} \frac{\pi y}{l} \right) = \mathrm{Cte} = n$$

d'où :

$$\operatorname{arctg} \left(\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{l} \cdot \mathrm{Th} \frac{\pi y}{l} \right) = \frac{2\pi n}{\mathrm{A}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{l} \cdot \mathrm{Th} \frac{\pi y}{l} = \operatorname{tg} \frac{2\pi n}{\mathrm{A}}.$$

Prenons toujours $l = 2\,\pi$ et supposons $\mathrm{A} = 8$:

$$\mathrm{Th} \frac{y}{2} = \operatorname{tg} \frac{2\pi n}{\mathrm{A}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi n}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Comme pour la file de tourbillons, il y a une périodicité de valeur $l = 2\pi$; il suffit de calculer une tranche dont l'abcisse varie de $\Delta x = 2\pi$.

L'expression de la vitesse complexe est :

$$u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{\mathrm{A}}{2\pi} \mathrm{L} \sin \left(\frac{\pi}{l} z \right) \right] = \frac{\mathrm{A}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{l} z \right) = \frac{\mathrm{A}}{2l} \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{l} z \right).$$

Les points de vitesse nulle seront, comme pour les tourbillons, donnés par la relation :

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{l} z = 0 \qquad \text{si} \qquad \frac{\pi}{l} z = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$$

or $l = 2\pi$ d'où :

$$\frac{\pi}{l} z = \frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

donc z réel : $z = \pi + 2k\pi$, ce qui était à prévoir facilement.

Déterminons maintenant les valeurs de n correspondant aux lignes singulières. En écrivant que l'équation $Th\left(\frac{y}{2}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi n}{4}.\ \text{tg}\,\frac{x}{2}$ est vérifié pour les points de vitesse nulle, on trouve immédiatement : $n = 0$.

Calculons encore la vitesse induite à l'infini par cette file de puits :

$$\lim_{y=+\infty}[u - iv] = \lim_{y=+\infty}\left[\frac{A}{2l}\,.\,\text{cotg}\,\frac{\pi}{l}\,z\right] = \frac{A}{2l}(-i) = -i\,\frac{A}{4\pi} = -\frac{2i}{\pi}$$

(imaginaire pure).

Le rapport des vitesses induites à l'infini est : $\frac{v_\infty\ (\text{puits})}{u_\infty\ (\text{tourb.})} = \frac{1}{\pi}$ (inverse du rapport des écartements).

c) Construction de la file de puits-tourbillons

La *fig. 35* représente l'écoulement obtenu par superposition des deux champs élémentaires calculés. Les centres tourbillonnaires subsistent évidemment; à l'infini

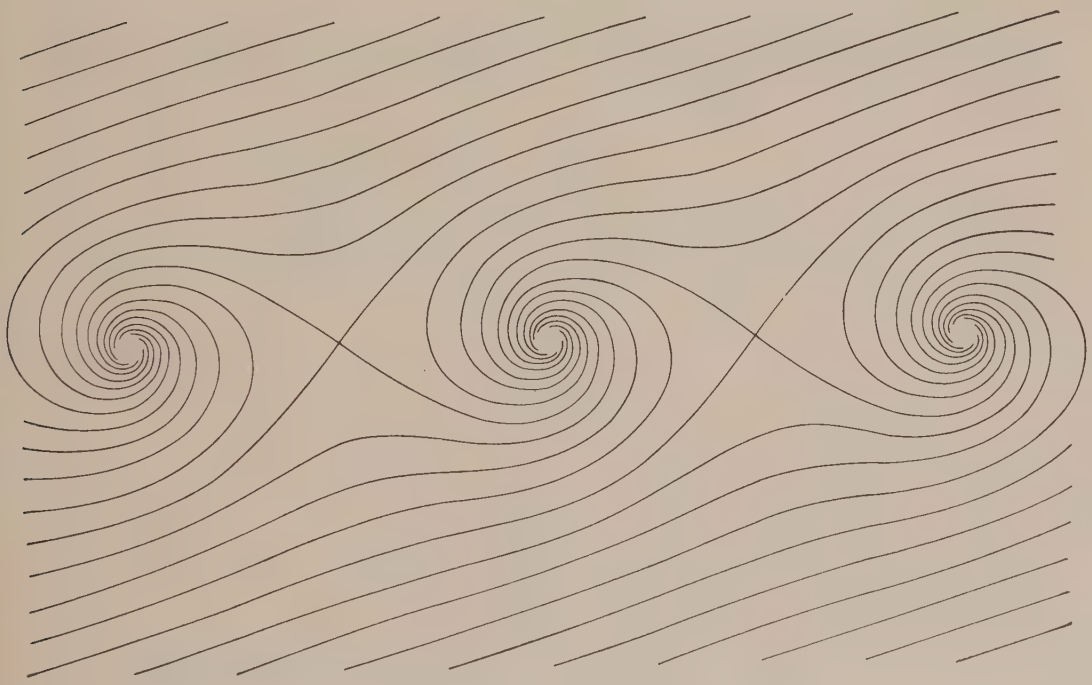


Fig. 35. — File de puits-tourbillons.

nous avons un courant uniforme dont les deux composantes sont respectivement les vitesses induites par la file de tourbillons seuls et par la file de puits seuls.

Points de vitesse nulle. — Ils sont aux endroits que nous avons trouvés à la fois pour les deux écoulements composants; c'est à dire aux points :

$$x = \pi + 2k\pi = \frac{l}{2} + kl$$

résultat que nous donne d'ailleurs également l'examen de la vitesse complexe :

$$f = f_t + f_p = \frac{\mathrm{I}}{2i\pi} \mathrm{L} \sin \frac{\pi}{l} z + \frac{\mathrm{A}}{2\pi} \mathrm{L} \sin \frac{\pi}{l} z$$

$$u - iv = \frac{1}{2l} (\mathrm{A} - i\mathrm{I}) \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{l} z \right).$$

La vitesse complexe sera nulle pour z réel et égal à :

$$z = \pi + 2k\pi$$

$$z = \frac{l}{2} + kl.$$

Lignes singulières. — Les lignes singulières (aboutissant aux points de vitesse nulle) sont facile à déterminer, par la méthode des champs diagonaux. Nous voyons que les points de vitesse nulle sont déterminés par l'intersection de deux lignes singulières, l'une d'elles possédant deux branches infinies, l'autre possédant deux branches qui s'enroulent dans les deux tourbillons voisins, à gauche et à droite. Il en résulte qu'un même tourbillon possèdera deux lignes singulières, j'y reviendrai plus loin.

Les lignes singulières auront pour équation :

$$\psi = \psi_t + \psi_p = -\frac{\mathrm{I}}{4\pi} \mathrm{L} \left[\frac{1}{2} (\mathrm{C}h\, y - \cos x) \right] + \frac{\mathrm{A}}{2\pi} \operatorname{Arctg} \left[\mathrm{T}h \frac{y}{2} . \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \right] = 0$$

d'où :

$$\mathrm{L} \left[\frac{1}{2} (\mathrm{C}h\, y - \cos x) \right] = \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{I}} \left[\mathrm{T}h \frac{y}{2} . \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \right].$$

Pour déterminer les valeurs des tangentes des courbes aux points de stagnation, développons l'expression obtenue ci-dessus au voisinage du point :

$$x = \pi, \quad y = 0$$

en posant :

$$x = \pi + x'$$

$$y = y'$$

nous avons finalement :

$$\frac{y'^2}{x'^2} + \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{I}} \cdot \frac{y'}{x'} - 1 = 0.$$

Soit θ l'angle que forme les tangentes avec l'axe des x',

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y'}{x'} = k$$

d'où la relation :

$$k^2 + \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{I}} k - 1 = 0$$

équation du deuxième degré dont les racines sont toujours réelles et de signes contraires; elles sont données par la formule :

$$k = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{I}} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{I}^2} + 1}.$$

Le produit des racines étant égal à 1 les deux solutions correspondent à des tangentes rectangulaires.

Si $A = 0$, ces tangentes sont également inclinées sur l'axe des x (file de tourbillons unique).

Si $A \neq 0$, il se produit une torsion de l'ensemble de l'écoulement au voisinage des points de vitesse nulle et qui est définie par l'équation ci-dessus.

En conclusion, nous voyons qu'une file unique de puits-tourbillons nous donne une série d'enroulements et de points de vitesse nulle. *Les enroulements possèdent deux lignes singulières et ils sont alimentés par du fluide venant des deux côtés de la file.* Ainsi deux molécules situées à l'infini et symétriquement par rapport à un enroulement, pourront par la suite se rapprocher et cheminer côte à côte. *Les points de vitesse nulle sont formés par la rencontre de deux courbes singulières.*

Tout en rappelant le phénomène des enroulements naturels, ce cas théorique en diffère par les faits suivants :

1° Les enroulements sont plus compliqués que dans le cas réel, puisqu'ils sont formés par le mélange du fluide provenant de 2 régions différentes;

2° Le phénomène n'admet pas d'axe de symétrie et nous ne pouvons pas l'utiliser pour représenter un écoulement au voisinage d'une paroi plane.

Aussi allons-nous voir, en compliquant le problème, que nous pouvons nous rapprocher d'un phénomène plus voisin de la réalité. Ce nouveau cas nous interprétera notamment un écoulement au voisinage d'une paroi.

Rue de puits-tourbillons symétrique.

Considérons deux files de puits-tourbillons symétriques par rapport à l'axe des x et disposées comme l'indique la *fig. 36.*

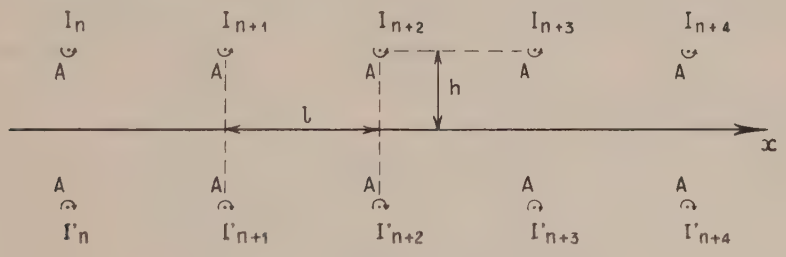


Fig. 36. — Rue de puits-tourbillon symétrique

Les abcisses des différents centres de la rue, en choisissant convenablement l'origine, sont : $x = k\,l$

l étant l'espacement des centres sur une file;
k étant un nombre entier.

La file supérieure, de cote $y = + h$ possède des puits d'intensité A et des tourbillons d'intensité + I. Nous supposerons $I > 0$ et naturellement $A < 0$.

La file inférieure, de cote $y = -h$, possède des puits d'intensité A et des tourbillons d'intensité — I.

Potentiel complexe. — Il est facile d'écrire le potentiel complexe de cette rue à partir des potentiels complexes de chacune des 2 files :

$$\text{file supérieure : } f_s = \frac{I}{2i\pi} L \sin \frac{\pi}{l}(z - ih) + \frac{A}{2\pi} L \sin \frac{\pi}{l}(z - ih)$$

$$\text{file inférieure : } f_i = -\frac{I}{2i\pi} L \sin \frac{\pi}{l}(z + ih) + \frac{A}{2\pi} L \sin \frac{\pi}{l}(z + ih).$$

D'où l'expression du potentiel complexe f :

$$f = f_s + f_i = \frac{I}{2i\pi} L \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z - ih)}{\sin \frac{\pi}{l}(z + ih)} + \frac{A}{2\pi} L \left[\sin \frac{\pi}{l}(z - ih) \cdot \sin \frac{\pi}{l}(z + ih) \right].$$

Vitesse complexe. — Formons $u - iv = \frac{df}{dz}$

$$\frac{df}{dz} = -\frac{iI}{2\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z + ih)}{\sin \frac{\pi}{l}(z - ih)} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{l}(z - ih) \cdot \sin \frac{\pi}{l}(z + ih) - \cos \frac{\pi}{l}(z + ih) \cdot \sin \frac{\pi}{l}(z - ih)}{\sin^2 \frac{\pi}{l}(z + ih)} \cdot \frac{\pi}{l}$$

$$+ \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{l}(z - ih) \cdot \sin \frac{\pi}{l}(z + ih) + \cos \frac{\pi}{l}(z + ih) \cdot \sin \frac{\pi}{l}(z - ih)}{\sin \frac{\pi}{l}(z - ih) \cdot \sin \frac{\pi}{l}(z + ih)} \frac{\pi}{l}$$

En effectuant le calcul nous aurons :

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{Ch \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi z}{l}} \cdot \left[I\, Sh \frac{2\pi h}{l} + A \sin \frac{2\pi z}{l} \right]$$

posons $l = 2\pi$, nous aurons finalement :

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{I\, Sh\,(h) + A \sin\,(z)}{Ch\,(h) - \cos\,(z)}.$$

Discussion

a) $u - iv = \infty$; la vitesse complexe devient infiniment grande quand nous avons :

$$Ch\,(h) - \cos\,(z) = 0$$

les solutions évidentes sont :

$$z = \pm ih + 2k\pi = \pm ih + kl.$$

Nous retrouvons naturellement les centres des puits tourbillons de la rue.

b) $u - iv = 0$; la vitesse complexe s'annule pour :

$$I\,Sh\,(h) + A \sin\,(z) = 0$$

d'où :

$$\sin\,(z) = -\frac{I}{A}\,Sh\,(h).$$

Il y a différents cas à distinguer suivant les valeurs de l'expression $-\frac{I}{A}\,Sh\,(h)$. Pour simplifier supposons $h =$ fixe et faisons varier le rapport $\frac{I}{A}$.

Premier cas.

$$\left|\frac{I}{A}\,Sh\,(h)\right| < 1 \quad \text{ce qui donne} \quad \sin\,(z) < 1,$$

donc z réel, alors :

$$\sin x = -\frac{I}{A}\,Sh\,(h)$$

d'où :

$$x = \text{arc sin}\left[-\frac{I}{A}\,Sh\,(h)\right] + 2k\pi;$$

soit α le plus petit des arcs admettant pour sinus la valeur $-\frac{I}{A}\,Sh\,(h)$, x est alors donné par les deux déterminations :

$$x = \alpha + 2k\pi \qquad \text{et} \qquad x = \pi - \alpha + 2k\pi.$$

Les points de vitesse nulle sont donc disposés sur l'axe des x, symétriquement par rapport aux points d'abcisses :

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ c'est-à-dire } \frac{l}{4} + kl.$$

Si $I = 0$, $\sin x = 0$, donc $x = k\pi = \frac{kl}{2}$.

Quand au contraire $I \neq 0$, les points de vitesse nulle se déplacent sur l'axe des x en se groupant symétriquement autour des points M′ M″ M‴ de la *fig. 37*, et dont les abcisses sont : $x = \frac{l}{4} + kl$.

Deuxième cas.

$$\frac{I}{A}\,Sh\,(h) = 1, \text{ donc } \sin\,(z) = 1,$$

z réel. Il en résulte :

$$\sin x = 1, \text{ d'où } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{l}{4} + kl.$$

Les deux points symétriques de vitesse nulle du cas précédent se sont confondus et nous avons ainsi des points particuliers, desquels partent six branches singulières à la place de quatre; il est très facile de vérifier qu'en ces points les tangentes sont disposées à 60°.

Mais l'écoulement théorique qui intéresse directement mes recherches expérimentales est celui où l'intensité des tourbillons est suffisamment grande pour créer une circulation à l'intérieur de la rue.

Troisième cas.

$$\frac{I}{A} Sh\,(h) > 1 \text{ d'où : } \sin z > 1,$$

donc z complexe, nous aurons :

$$\sin z = -\frac{I}{A} Sh\,(h) = \sin\,(x + iy) = \sin x.\, Ch\, y + i.\, \cos x\, Sh\, y.$$

Cette équation est équivalente au système :

(1) $$\cos x.\, Sh\, y = 0$$

(2) $$\sin x.\, Ch\, y = -\frac{I}{A} Sh\,(h).$$

Les solutions de l'équation (1) sont :

$$\cos x = 0 \quad \text{donc} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

or, dans l'équation (2), il faut évidemment que $\sin x > 0$.

Les solutions de l'équation (1) se réduisent alors :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\,k\pi = \frac{l}{4} + kl$$

nous aurons donc :

$$\sin x = 1$$

et l'équation (2) donnera :

$$Ch\, y = -\frac{I}{A} Sh\,(h)$$

$$y = \pm\, Arg\, Ch \left(-\frac{I}{A} Sh\,(h)\right).$$

Les points de vitesse nulle quittent donc l'axe réel en s'éloignant sur les droites $x = \frac{l}{4} + kl$ (normalement à l'axe de la rue).

En résumé, en faisant varier le rapport $\frac{I}{A}$ depuis la valeur 0, les points de vitesse nulle distants initialement de la longueur $\frac{l}{2}$ se rapprochent deux à deux, A′ et B′, A″ et B″, A‴ et B‴, etc... *(fig. 37)* puis ils se confondent pour $\frac{I}{A} = \frac{1}{Sh\,(h)}$; ensuite ils se séparent de nouveau dans la direction perpendiculaire et en restant toujours symétriques. Pour $\frac{I}{A} = \infty$ les points de vitesse nulle sont rejetés à l'infini et nous nous trouvons dans le cas de la rue de tourbillons symétrique (sans les puits).

Construction de l'écoulement

La *fig. 38* représente l'écoulement obtenu en superposant les écoulements des deux files de puits-tourbillons que nous venons d'étudier. L'écartement de la rue est égal à l'intervalle des centres sur les files. Ce cas se différencie des cas précédents par le fait

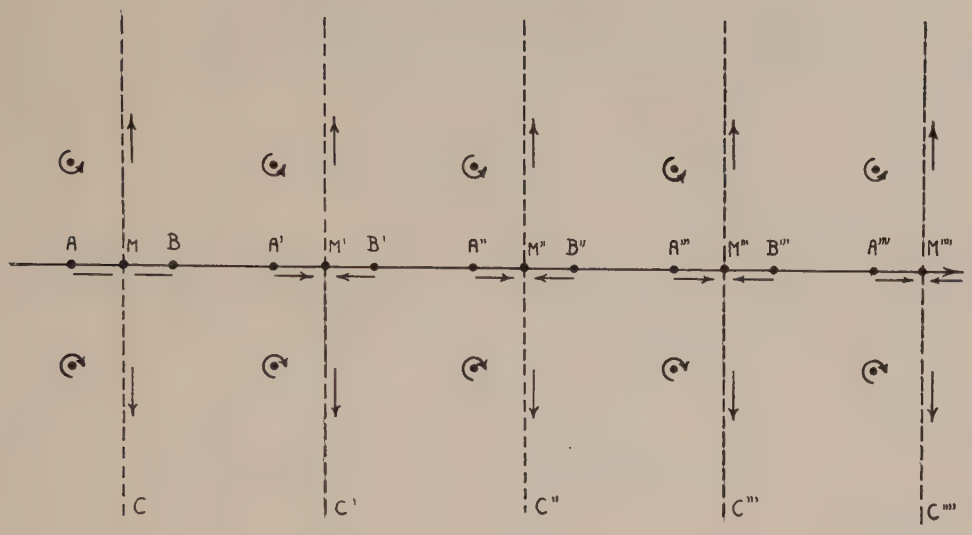


Fig. 37. – Lignes singulières. — Déplacements des points de vitesse nulle

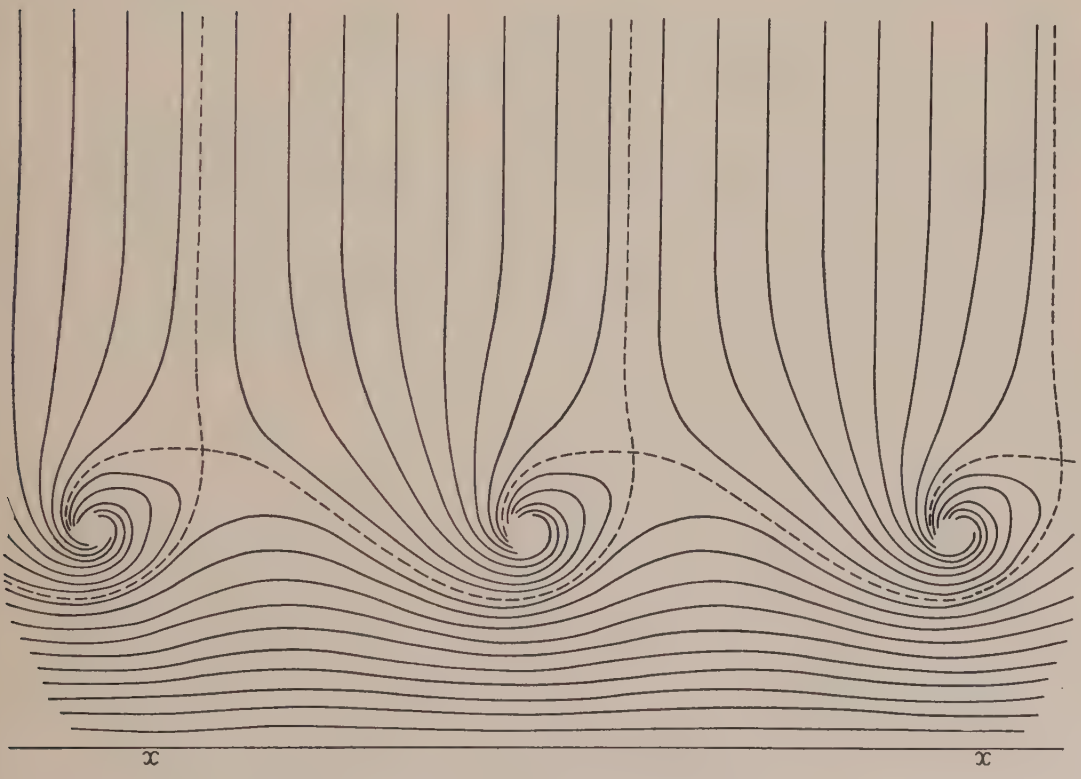


Fig. 38. — Demi-rue de puits-tourbillons symétrique

important que les deux files de la rue sont séparées par une circulation de fluide dans la direction de l'axe des x et conformément au sens des tourbillons.

Cette circulation est limitée de part et d'autre par deux lignes singulières passant par les différents points de vitesse nulle. La vitesse induite à l'infini est dirigée perpendiculairement à l'axe de la rue.

Détermination de la fonction de courant

Le potentiel complexe a pour expression :

$$F = \varphi + i\psi = \frac{I}{2i\pi} \cdot L \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z - ih)}{\sin \frac{\pi}{l}(z + ih)} + \frac{A}{2\pi} \cdot L \left[\sin \frac{\pi}{l}(z - ih) \cdot \sin \frac{\pi}{l}(z + ih) \right]$$

d'où :

$$\overline{F} = \varphi - i\psi = -\frac{I}{2i\pi} \cdot L \frac{\sin \frac{\pi}{l}(\bar{z} + ih)}{\sin \frac{\pi}{l}(\bar{z} - ih)} + \frac{A}{2\pi} \cdot L \left[\sin \frac{\pi}{l}(\bar{z} + ih) \cdot \sin \frac{\pi}{l}(\bar{z} - ih) \right]$$

nous obtenons :

$$2i\psi = \frac{I}{2i\pi} L \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z - ih)}{\sin \frac{\pi}{l}(z + ih)} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{l}(\bar{z} + ih)}{\sin \frac{\pi}{l}(\bar{z} - ih)} + \frac{A}{2\pi} L \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z - ih)}{\sin \frac{\pi}{l}(\bar{z} + ih)} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z + ih)}{\sin \frac{\pi}{l}(\bar{z} - ih)}.$$

En développant et en transformant nous trouvons :

$$2i\psi = \frac{I}{2i\pi} L \frac{\cos \frac{2i\pi}{l}(y - h) - \cos \frac{2\pi x}{l}}{\cos \frac{2i\pi}{l}(y + h) - \cos \frac{2\pi x}{l}} + \frac{A}{2\pi} L \frac{\cos \frac{2i\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi}{l}(x + iy)}{\cos \frac{2i\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi}{l}(x - iy)}$$

$$= \frac{I}{2i\pi} L \frac{Ch \frac{2\pi}{l}(y - h) - \cos \frac{2\pi x}{l}}{Ch \frac{2\pi}{l}(y + h) - \cos \frac{2\pi x}{l}} + \frac{A}{2\pi} L \frac{Ch \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi}{l}(x + iy)}{Ch \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi}{l}(x - iy)}$$

$$= \frac{I}{2i\pi} L \frac{Ch \frac{2\pi}{l}(y - h) - \cos \frac{2\pi x}{l}}{Ch \frac{2\pi}{l}(y + h) - \cos \frac{2\pi x}{l}} +$$

$$+ \frac{A}{2\pi} \frac{Ch \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot Ch \frac{2\pi y}{l} + i \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot Sh \frac{2\pi y}{l}}{Ch \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot Ch \frac{2\pi y}{l} - i \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot Sh \frac{2\pi y}{l}}.$$

Posons alors comme plus haut :

$$Ch \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot Ch \frac{2\pi y}{l} = a$$

$$\sin \frac{2\pi x}{l} \cdot Sh \frac{2\pi y}{l} = b$$

nous aurons :

$$2i\psi = \frac{I}{2i\pi} L \frac{Ch\frac{2\pi}{l}(y-h) - \cos\frac{2\pi x}{l}}{Ch\frac{2\pi}{l}(y+h) - \cos\frac{2\pi x}{l}} + \frac{A}{2\pi} L \frac{a+ib}{a-ib}.$$

En posant :

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

il vient après simplification :

$$\psi = -\frac{I}{4\pi} L \frac{Ch\frac{2\pi}{l}(y-h) - \cos\frac{2\pi x}{l}}{Ch\frac{2\pi}{l}(y+h) - \cos\frac{2\pi x}{l}} + \frac{A\theta}{2\pi}.$$

Les lignes de courant sont donc données par l'équation :

$$\frac{1}{4\pi}\left[I \,.\, L \frac{Ch\frac{2\pi}{l}(y-h) - \cos\frac{2\pi x}{l}}{Ch\frac{2\pi}{l}(y+h) - \cos\frac{2\pi x}{l}} - 2A\theta \right] = n$$

avec la relation :

$$\theta = \operatorname{Arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{Arctg}\frac{\sin\frac{2\pi x}{l} \cdot Sh\frac{2\pi y}{l}}{Ch\frac{2\pi h}{l} - \cos\frac{2\pi x}{l} \cdot Ch\frac{2\pi y}{l}}.$$

Détermination des lignes singulières. — Les lignes singulières passent par les points de vitesse nulle; pour déterminer la constante correspondante de la fonction de courant, il suffit d'introduire les coordonnées de ces points dans l'expression de la fonction ψ. Le cas qui nous intéresse spécialement est celui de la circulation dans la rue, c'est-à-dire celui où les points de vitesse nulle sont en dehors de l'axe des x. Les coordonnées de ces points sont :

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{l}{4} + kl$$
$$y_0 = \operatorname{Arg} Ch\left[-\frac{I}{A} Sh\,(h)\right].$$

Dans l'exemple pour lequel je donne la représentation de l'écoulement

$$h = \pi$$
$$I = 8\pi$$
$$A = 8$$
$$\frac{I}{A} = \pi$$

d'où facilement la valeur numérique de y :

$$y_0 = 4{,}28$$

en remarquant que :

$$\cos x = 0$$
$$\sin x = 1$$

nous aurons finalement :

$$\psi = \frac{2}{\pi}\left[\pi \,.\, \mathrm{L}\,\frac{Ch\,(y_0 - h)}{Ch\,(y_0 + h)} - 2\,.\,\mathrm{Arctg}\,\frac{Sh\,y_0}{Ch\,h}\right].$$

Une ligne singulière possède les propriétés suivantes : elle vient de l'infini (perpendiculairement à l'axe de la rue), en passant par un point de vitesse nulle pour s'enrouler au voisinage d'un centre de la file correspondante. Les lignes singulières se rencontrent deux à deux aux points de vitesse nulle.

Comparaison de ce cas théorique avec l'écoulement réel.

Ce cas théorique présente encore quelques différences avec la réalité.

En mettant à part le fait que l'intervalle des centres des deux files de la rue est constant (hypothèse simplificatrice qui ne crée pas une contradiction essentielle), et que la direction du courant fluide à l'infini est perpendiculaire à la rue (une transformation géométrique permet de faire varier cette direction), il y existe les particularités suivantes : une ligne singulière traverse deux points de vitesse nulle; les différents enroulements contrairement au fait expérimental ne sont pas séparés par des domaines du fluide participant au courant de circulation dans la rue (plages); le long de l'axe de symétrie la vitesse varie d'une façon continue, bien qu'elle soit influencée par la présence des points de vitesse nulle (il est aisé de voir en partant de l'expression de la vitesse complexe que cette variation est sinusoïdale); dans le phénomène réel au contraire il existe au voisinage de la glace limitant l'écoulement un gradient de vitesse particulier (zônes décelées par la méthode de l'iode).

Mais les caractères fondamentaux de l'écoulement sont en parfait accord avec le phénomène réel décrit au chapitre II (Phénomène des enroulements).

Comme dans le cas réel :

1° *Les enroulements* sont à branche singulière unique provenant d'un point de vitesse nulle.

2° *Les lignes singulières* se terminent d'une part dans un enroulement et d'autre part par une branche infinie.

3° *Les points de vitesse nulle* sont formés par l'intersection de deux lignes singulières.

4° *La circulation dans la rue* correspond à l'écoulement dans les plages du phénomène réel.

Bien que nous soyons encore très loin de l'interprétation théorique du phénomène des enroulements, ces points de concordance nous paraissent justifier l'exposé que nous venons de présenter.

Partie C

THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT AU VOISINAGE D'UN PLAN PORTANT UN OBSTACLE

Idées générales.

Rappelons brièvement ce que nous révèle l'investigation de l'écoulement au voisinage de ce plan et en amont de l'obstacle :

Il y existe un courant secondaire (plage) opposé au courant général, et engendré par des filets fluides en provenance du pied de l'obstacle. (Ces filets ont quitté leur direction initiale pour s'incurver vers la glace.)

Tout se passe comme si ce courant secondaire était dû à une émission de fluide localisé au pied de l'obstacle. S'il en était ainsi, nous serions en présence d'une source placée dans un courant autour d'un cylindre.

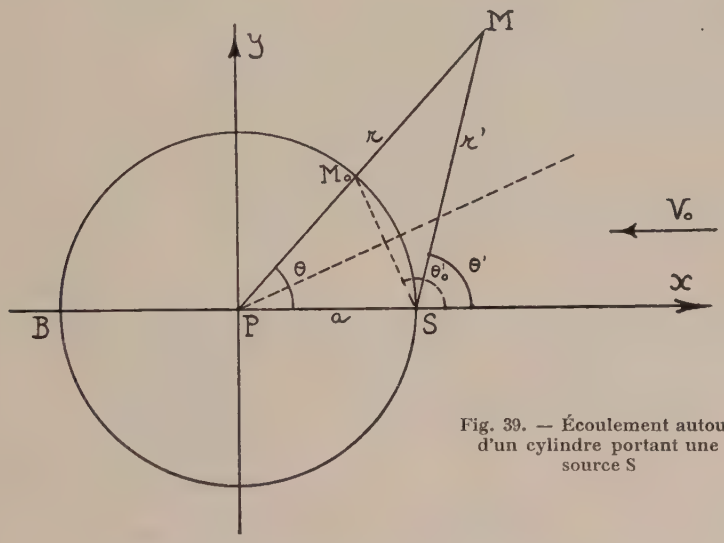


Fig. 39. — Écoulement autour d'un cylindre portant une source S

J'ai étudié théoriquement un tel écoulement en me plaçant dans le cas cylindrique, il est bien entendu que dans le cas réel, la source n'est qu'une image assez imparfaite et que l'écoulement dans la plage est loin d'être un phénomène cylindrique.

Le problème à résoudre est par conséquent le suivant : Trouver l'écoulement résultant de la superposition d'un courant autour d'un cylindre de révolution et d'un courant produit par une source placée sur ce cylindre au point de bifurcation amont *(fig. 39)*.

a) Ecoulement autour d'un cylindre de révolution. — Nous connaissons ce problème classique. Si V_0 est la vitesse du courant uniforme à l'infini, a le rayon du cylindre, nous aurons :

potentiel complexe : $$F_1 = -V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

fonction de courant : $\psi = -V_0\, y\, \frac{r^2 - a^2}{a^2} = n$

nous voyons en particulier que pour $\psi = 0$ on a : $r^2 = a^2$ (section du cylindre).

b) Courant produit par une source placée sur un cylindre de révolution. — Pour trouver cet écoulement considérons, dans un fluide illimité au repos à l'infini, une source S d'intensité A et un puits P d'intensité $\frac{A}{k}$, $k > 1$, distants de a. L'écoulement comprendra forcément une ligne singulière passant par la source S et renfermant le puits P; une partie du débit de la source sera neutralisée par le débit du puits (écoulement à l'intérieur de la ligne singulière), c'est la quantité

$$A - \frac{A}{k} = A\,\frac{k-1}{k}$$

le reste produira l'écoulement à l'extérieur de la ligne singulière. On peut déterminer la constante k pour que cette ligne devienne un cercle admettant le puits P comme centre et passant par la source S.

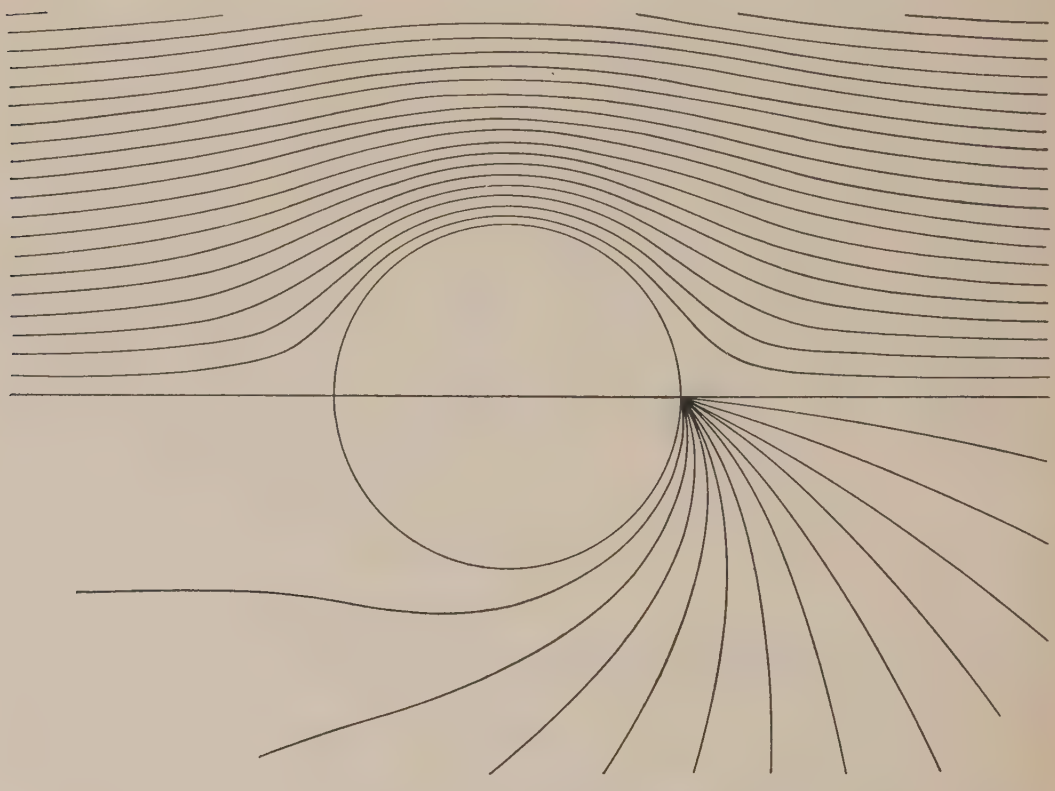


Fig. 40. — Écoulement autour d'un cylindre (Partie supérieure : courant uniforme, partie inférieure : source)

Potentiel complexe. Le potentiel de la source est : $f_s = A\,L\,(z - a)$; le potentiel du puits est : $f_p = \frac{-A}{k}\,L\,z$, d'où le potentiel résultant :

$$F_2 = f_s + f_p = A\,L\,(z - a) - \frac{A}{k}\,L\,z = \frac{A}{k}\,[k\,L\,r'\,e^{i\theta'} - L\,r\,e^{i\theta}].$$

Fonction de courant : On obtient facilement :

$$\psi = \frac{A}{k}[k\theta' - \theta].$$

Or, nous voudrions que le cercle ayant son centre à l'origine des coordonnées et ayant comme rayon a soit une ligne de courant particulière; mais sur ce cercle on a :

$$\frac{\theta}{2} = \theta' - \frac{\pi}{2}$$

d'où :

$$\theta' - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$2\theta' - \theta = \pi = \text{Cte}$$

il en résulte que la constante k dans l'expression de la fonction de courant est égale à 2.

Nous pouvons construire ces deux écoulements élémentaires soit par le calcul, soit, ce qui est plus rapide, par la méthode des champs diagonaux en composant le courant du cylindre à l'aide d'un courant uniforme et d'un doublet d'une part, et d'autre part, le courant de la source à l'aide d'une source et d'un puits d'intensité moitié; la source et le puits seront d'ailleurs espacés d'une longueur égale au rayon du cylindre.

Les champs d'écoulement ainsi obtenus sont représentés dans la *fig. 40.* La partie supérieure correspond à l'écoulement autour du cylindre tandis que la partie inférieure représente l'écoulement de la source.

Écoulement résultant de la superposition d'un courant uniforme et d'une source placée sur l'obstacle.

Superposons maintenant ces deux écoulements de façon que la source vienne au point de bifurcation amont du cylindre. Il va sans dire que le cercle de rayon a restera ligne de courant singulière. Je me propose spécialement de déterminer la ligne de partage λ du courant produit par la source et du courant extérieur.

Potentiel complexe :

$$F = F_1 + F_2 = -V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{A}{2}[2L(z-a) - Lz].$$

Forme des trajectoires. — La fonction de courant est :

$$\psi = -V_0\, y\left(\frac{r^2 - a^2}{r^2}\right) + \frac{A}{2}(2\theta' - \theta).$$

L'axe des x est naturellement axe de symétrie de l'écoulement, calculons la distribution des vitesses le long de lui : la vitesse complexe est :

$$u - iv = \frac{dF}{dz} = -V_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{A}{z-a} - \frac{A}{2z}$$

avec $z = x$ nous aurons :

$$u = -V_0\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) + \frac{A}{x-a} - \frac{A}{2x}.$$

Points singuliers de vitesse infinie. — La vitesse devient infiniment grande pour :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = -a.$$

Ce sont les abcisses de la source S et du puits P.

Points singuliers de vitesse nulle. — Leurs abcisses sont données par l'équation :

$$-V_0\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)+\frac{A}{x-a}-\frac{A}{2x}=0$$

ou encore :

$$\frac{a^2-x^2}{x^2}+\frac{A}{V_0}\frac{x+a}{2x\,.\,(x-a)}=0.$$

Posons : $A = 4\mu V_0$ et supposons : $x \neq 0$, $x \neq a$.

Nous aurons en multipliant par $x^2\,(x-a)$:

$$(a^2-x^2)\,(x-a)+2\mu\,(x+a)\,.\,x=0.$$

C'est une équation du 3e degré dont l'une des racines est $x = -a$, elle correspond au point de confluence B aval du cylindre *(fig. 39)*. Divisons par $x + a$:

$$(x-a)^2-2\,\mu\,x=0$$
$$x^2-2\,x\,(a+\mu)+a^2=0$$

le discriminant de cette équation est toujours positif, il est en effet :

$$\Delta' = (a+\mu)^2-a^2 = 2\,a\mu+\mu^2.$$

Les racines sont donc réelles, elles sont toutes les deux positives; leur produit est égal à a^2. (Points inverses par rapport au cercle).

L'un des points correspondants est situé à l'intérieur du cercle, $x' < a$, l'autre est au contraire à l'extérieur $x'' > a$, c'est ce dernier qui nous intéresse. Le fluide émis par la source S remontera donc contre le courant général (en s'épanouissant d'ailleurs à droite et à gauche de l'axe des x) d'une longueur égale à Y :

$$Y = x''-a = \left[a+\mu+\sqrt{2\,a\,\mu+\mu^2}\right]-a = \mu+\sqrt{2\,a\,\mu+\mu^2}.$$

La ligne de séparation λ passe évidemment par ce point de vitesse nulle. L'étude de la fonction de courant montre immédiatement que cette ligne a pour équation $\psi = 0$, nous aurons donc dans ce cas particulier l'équation :

$$\frac{A}{2}(2\,\theta'-\theta) = V_0\,.\,y\,.\left(\frac{r^2-a^2}{r^2}\right).$$

Comparaison des résultats théoriques avec l'expérience.

Comparons une plage expérimentale (déterminée par photographie) avec une plage théorique. A cet effet j'ai relevé la dimension Y de la plage :

$$Y = x'' - a$$

ce qui donne un rapport : $\frac{Y}{d} = K$

$d = 2a$ étant le diamètre du cylindre, il est facile de déduire de cette valeur numérique le rapport $\frac{A}{V_0}$:

$$Y = x'' - a = \mu + \sqrt{d\mu + \mu^2} = Kd$$

d'où facilement :

$$(Kd - \mu)^2 = d\mu + \mu^2 = K^2d^2 - 2Kd\mu + \mu^2$$

il en résulte :

$$\mu = \frac{K^2}{1 + 2K} \cdot d$$

et finalement :

$$\frac{A}{V_0} = 4\mu = \frac{4K^2}{1 + 2K} \cdot d \ (K = 0{,}875, \text{ valeur relevée sur la photographie}).$$

Partant alors d'une vitesse V_0 donnée, nous calculons mimédiatement l'intensité A de la source et l'intensité $\frac{A}{2}$ du puits. D'où facilement l'écoulement de la source placée sur le cylindre. Ces deux champs sont représentés séparément dans la *fig. 40*. Leur superposition fournit la ligne singulière de la plage. La *figure 41* montre les résultats obtenus, et le tableau ci-après comprend les coordonnées polaires respectives de la courbe expérimentale et de la courbe théorique avec les erreurs relatives. Les deux courbes partent tangentiellement de l'axe des x; la courbe expérimentale est plus aplatie initialement (cela est dû sans doute au fait que l'hypothèse de la source ponctuelle est trop simple). La courbe théorique se trouve à l'intérieur de la courbe expérimentale, le plus gros écart relatif se fait pour θ voisin de 70 grades, l'erreur relative est de 7,2 %. A partir de l'azimut de 100 grades la concordance devient trés satisfaisante; la courbe expérimentale traverse la courbe théorique, mais à partie de 160 grades elle devient instable (effet du sillage).

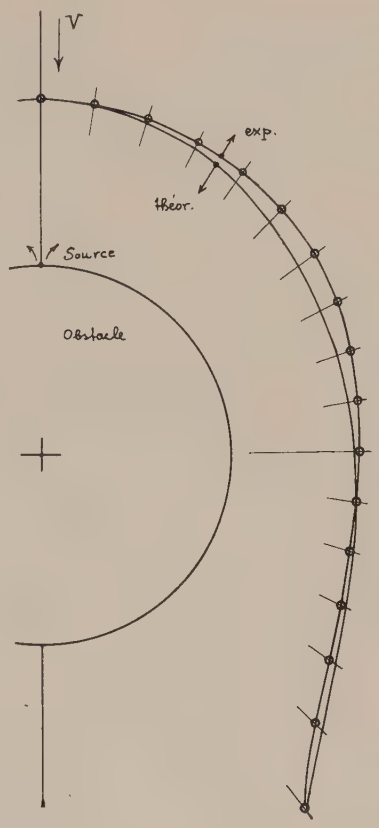


Fig. 41. — Comparaison d'une plage expérimentale avec une plage théorique

Variations des plages

La dimension d'une plage théorique est donnée par la formule :

$$Y = x'' - a = \mu + \sqrt{d\mu + \mu^2}.$$

Pour μ petit (source faible) la ligne singulière λ se rapproche indéfiniment du cylindre (la plage est très réduite). Pour μ grand (source forte) la ligne singulière λ s'éloigne indéfiniment du cylindre. Dans le phénomène réel au contraire, la plage tend vers une

limite finie. Autrement dit, au fur et à mesure que la vitesse d'écoulement croît, l'expression μ croît depuis la valeur 0 jusqu'à une valeur μ_0 constante et qui ne sera jamais dépassée; soit alors :

$$Y_0 = K_0 d \qquad K_0 = 1{,}2$$

d'où :

$$\mu_0 = \frac{K_0^2}{1 + 2K_0} \cdot d = 0{,}423$$

$$\frac{A}{V_0} = 4\mu_0 = 1{,}69\, d.$$

Soit Q_0 le débit de la source :

$$Q_0 = 2\pi A = 2\pi V_0\ 1{,}69\, d = 10{,}5\ V_0\ d$$

nous avons donc finalement : $\frac{Q_0}{d} \sim 10\, V_0$.

Le phénomène réel naturellement est à trois dimensions, et la vitesse V dans les différentes couches de la plage subit des variations très grandes puisque nous nous trouvons par définition même dans la couche limite. Néanmoins la formule ci-dessus peut être considérée comme un résultat approché en remplaçant V_0 par la vitesse moyenne de l'écoulement dans la région intéressant la formation des plages.

En résumé, cette théorie donne des résultats satisfaisants en ce qui concerne la forme de la plage et elle confirme notamment l'hypothèse d'une émission fictive de fluide au pied de l'obstacle.

Comparaisons d'une plage théorique et d'une plage expérimentale

Rayons polaires exprimés en diamètres.			
Angles polaires en grades	Rayons calculés	Rayons mesurés	Erreur relative
0	0,938	0,938	0
10	0,932	0,938	+ 0,6 %
20	0,920	0,934	+ 1,5 %
30	0,903	0,924	+ 2,3 %
40	0,884	0,920	+ 4,8 %
50	0,862	0,910	+ 5,5 %
60	0,842	0,903	+ 7,2 %
70	0,830	0,882	+ 6,2 %
80	0,825	0,872	+ 5,8 %
90	0,820	0,855	+ 4,2 %
100	0,828	0,841	+ 1,5 %
110	0,840	0,841	+ 0,1 %
120	0,864	0,851	— 1,5 %
130	0,902	0,882	— 2,2 %
140	0,954	0,924	— 3,1 %
150	1,038	1,009	— 2,7 %
160	1,170	1,165	— 0,4 %

CHAPITRE VI

SUR LES MANIFESTATIONS DIVERSES DU PHÉNOMÈNE DES ENROULEMENTS DANS LA NATURE ET SUR QUELQUES EFFETS HYDRODYNAMIQUES ET AÉRODYNAMIQUES

MANIFESTATIONS DIVERSES DU PHÉNOMÈNE DES ENROULEMENTS DANS LA NATURE

Nous avons étudié le phénomène des enroulements dans un écoulement autour d'un obstacle cylindrique posé sur un plan et nous avons montré par une théorie élémentaire comment nous pouvons expliquer la formation du courant antagoniste dans la plage et l'apparition de la série des enroulements. Nous pouvons reprendre ce raisonnement pour un obstacle de forme quelconque et nous aurons naissance du phénomène chaque fois que nous poserons cet obstacle sur une surface limitant l'écoulement. C'est ce que montrent des expériences très simples effectuées avec des sphères, des cônes ou des obstacles de forme plus compliquée. Seules les dimensions géométriques du phénomène varient.

Aussi ne nous étonnerons-nous pas d'être en présence d'un phénomène qui, très facile à produire, se rencontre fréquemment dans la nature. Ainsi beaucoup de chercheurs ont signalé des enroulements qu'ils appellent des tourbillons de pied ou de fer à cheval s'ils se forment dans l'air, ou des tourbillons ou des rouleaux s'ils se forment dans l'eau.

a) Le phénomène des enroulements se présente chaque fois qu'il y a mouvement d'air :

Nous le rencontrons au bord de la mer sur les dunes de sable.

C'est un fait courant d'observer les plages, en hiver, creusées par le vent, au pied des arbres dans la neige.

Les enroulements se formeront chaque fois qu'il y a un obstacle exposé au vent, (rocher, maison, etc.) et nous verrons le tracé des plages quand on aura à faire à un sol plus ou moins mouvant.

b) De même, nous rencontrons le phénomène des enroulements dans l'eau en mouvement.

Il se présente au fond des rivières où nous le voyons autant de fois qu'il y a d'obstacles : des rochers, des seuils, des pierres ou tout autre objet disposé au fond.

Je vais consacrer une étude spéciale aux piles de ponts et aux seuils.

LES AFFOUILLEMENTS EN HYDRAULIQUE — PILES DE PONT

L'affouillement qui se produit à la base d'une pile de pont constitue un phénomène connu depuis fort longtemps. Mais ce n'est que depuis une dizaine d'années que l'on s'est rendu compte exactement de la nature de cet affouillement : le travail de creusement de l'eau se fait surtout dans la région amont de la pile de pont, où l'on peut rencontrer des excavations dans le lit du cours d'eau dont les dimensions en longueur et en profondeur, suivant la constitution géologique du sol, peuvent atteindre celles de la pile de pont elle-même. Nous concevons aisément qu'un creusement atteignant une telle envergure peut mettre sérieusement en danger une construction hydraulique (effondrement de ponts par exemple).

Fig. 42. — Affouillement à la base des piles d'un pont (d'après Schoklitsch)

Ce phénomène a naturellement provoqué de nombreuses recherches :

α) des recherches purement scientifiques, elles sont rares; les auteurs ont constaté qu'il existe un tourbillon en amont d'un obstacle et à ses flancs. Certains chercheurs attribuent d'ailleurs ce phénomène à la dénivellation produite à la surface libre par la stagnation de l'eau.

β) des recherches d'ordre technique, elles sont plus nombreuses puisqu'elles intéressent directement l'hydraulique; mais corrélativement elles perdent leur intérêt général. Je citerai surtout :

Engels Z. f. Bauw. 1894 S. 407-416.

Keutner Bautech. 1929 H. 37, S. 575.

La photographie de la *fig. 42* représente des affouillements aux pieds des piles d'un pont (1).

(1) Les affouillements se sont produits pendant une forte crûe de la rivière et la photographie a été prise après le retrait des eaux. D'après Schoklitsch, Grundbau, 1932, Brno.

Explication de la formation de l'affouillement.

Soit un courant d'eau de vitesse V parallèle à un plan F et soit un cylindre circulaire droit posé sur ce plan; nous sommes en présence du phénomène étudié dans le chapitre IV sur les écoulements cylindriques : nous aurons la plage A P = 1,2 D avec la série des enroulements dont le premier est le plus intense et le plus volumineux *(fig. 43a)*.

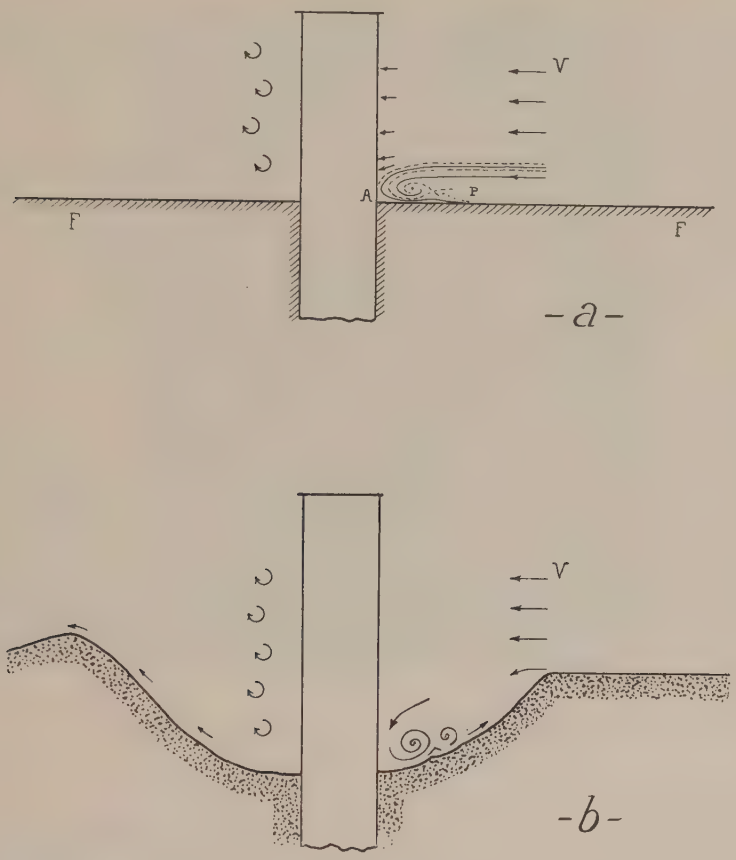


Fig 43. — Écoulement au voisinage d'une pile de pont
(*a*) sans affouillement, (*b*) avec affouillement

Je me suis proposé tout d'abord d'étudier cet écoulement au voisinage du plan F, celui-ci n'étant pas attaqué par l'eau. Nous savons que la plage A P est engendrée par un courant remontant et provenant du pied de l'obstacle. Les filets s'écartent en éventail à droite et à gauche du plan de symétrie vertical en produisant un balayage très prononcé du fond. Pour élucider le phénomène dans les dernières pellicules fluides de la plage, j'ai employé la méthode de l'iode déjà citée dans le chapitre II. En émettant un filet d'iode tel qu'il participe à l'écoulement dans la plage, nous obtenons l'inscription sur la surface sensibilisée du plan F caractérisée par une série de zones concentriques distinctes et correspondant chacune à un enroulement. Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, l'écoulement dans les dernières couches de la plage voisines du plan F

subit des variations brusques contrairement à ce que nous attendions. La *fig. 44* représente la trace de l'écoulement (1).

La *figure 45* représente les traces de l'ensemble de l'écoulement sur le plan et sur l'obstacle. Tandis que la *figure 45 a* a été obtenue par injection d'iode dans le sillage, entraînant de cette façon la décoloration de la région aval du cylindre et de la trace du

Fig. 44. — Écoulement au voisinage immédiat de la paroi (plage) Méthode de l'iode

sillage sur le plan, la *figure 45 b* a été réalisée par une injection appropriée effectuée en amont de l'obstacle. Nous distinguons très nettement les lignes caractéristiques sur le cylindre ainsi que l'inscription de la plage.

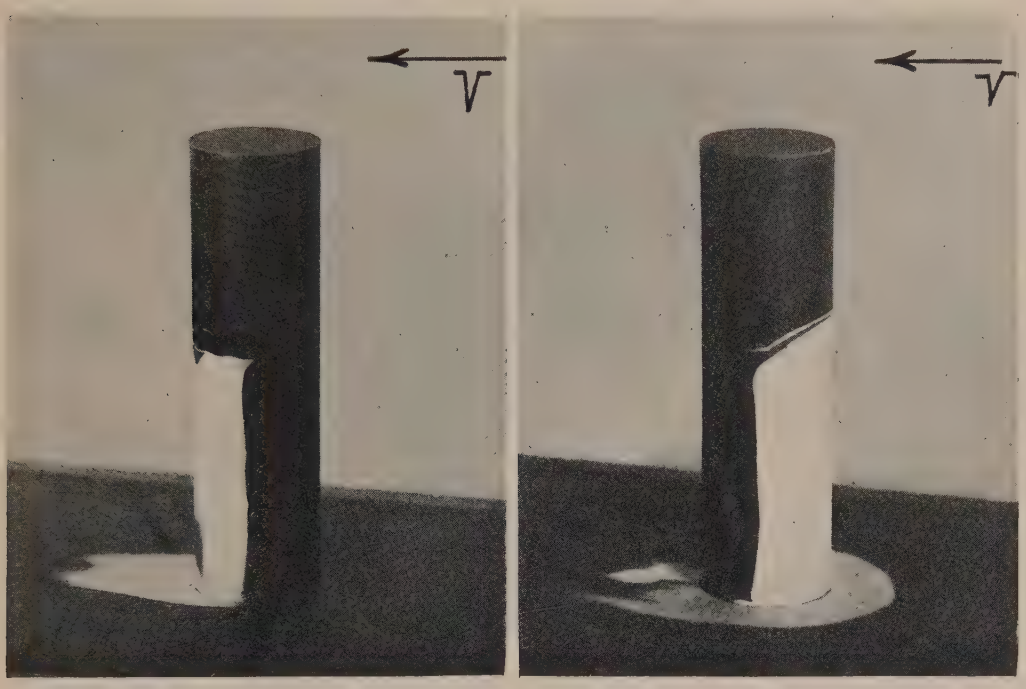
Étant donné ces particularités je m'attendais dans le cas où le plan F subit l'action des filets d'eau, à trouver une érosion non uniforme. C'est dans ce but que j'ai couvert le fond du canal par une couche épaisse de sable fin et bien homogène : J'ai observé effectivement un creusement échelonné (2).

---

(1) Dans le canal l'écoulement est moins permanent que dans le tunnel hydro-dynamique et les différentes zones de la plage sont plus difficiles à matérialiser, mais on obtient facilement la décoloration totale de la plage. Aussi. pour montrer le phénomène avec tous ses détails j'ai représenté dans la *fig. 44* un spectre obtenu entre glaces parallèles.

(2) Il est évident qu'en remplaçant ainsi le fond lisse du canal par un fond rugueux, on modifie les conditions initiales de l'écoulement.

La zône de la plage correspondant au premier enroulement est rongée en premier lieu, puis nous voyons le commencement de l'érosion de la 2e zône et ainsi de suite. L'affouillement progresse en longueur et en profondeur pour tendre vers un état d'équilibre; sa forme générale est celle des plages, les enroulements rentrent peu à peu sous le niveau du fond initial. Ainsi, la pile de pont sera entourée d'une sorte de cratère qui se prolonge jusque dans le sillage (voir *fig. 43b*). Pendant le travail de creusement les



(*a*) (*b*)

Fig. 45. — Écoulement au voisinage d'une pile de pont (sans affouillement) méthode de l'iode

grains de sable sont entraînés par les filets d'eau et matérialisent les différentes régions de l'écoulement; nous distinguons très nettement les trois premiers enroulements, le premier point de vitesse nulle, les filets remontants de la plage.

L'affouillement, tout autant que le phénomène des enroulements, est donc indépendant de ce qui se passe à la surface libre, il est uniquement un effet de la couche limite du fond. Il se produit tout aussi bien en remplaçant la surface libre par une glace horizontale, ce qui supprime la pression supplémentaire résultant de la stagnation de l'eau.

Évolution de l'affouillement en fonction du temps.

Pour entreprendre ce travail j'ai dû réaliser une réduction d'une tranche de rivière avec une maquette de pile de pont. J'ai transformé à cet effet le canal ouvert en y déposant sur une certaine longueur une couche de 4 cm de sable quartzeux, à grains très fins

et très règuliers. La maquette de la pile de pont est un cylindre de 2,1 cm de diamètre. Le reste des caractéristiques de l'expérience est indiqué sur la feuille d'essai ci-jointe. Le graphique de la *fig.* 46 montre l'évolution de l'affouillement. La dimension maxima tend vers la valeur limite 2,14 *d*, tandis que pour le fond lisse et non attaqué par l'eau on avait 1,2 *d*.

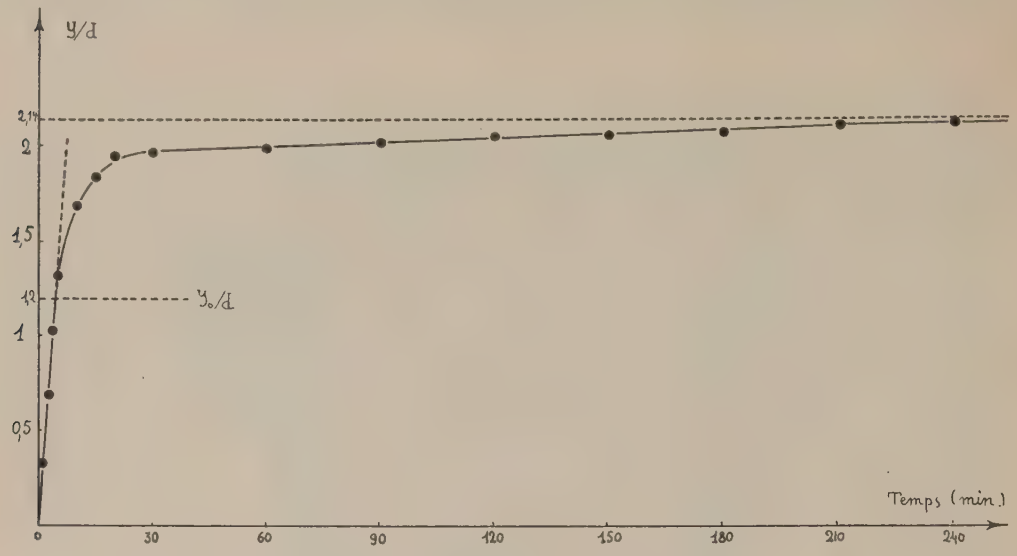


Fig. 46. — Évolution de l'affouillement en fonction du temps.

On distingue deux étapes nettement différentes, séparées par une étape intermédiaire :

Étape I. — Pendant les cinq premières minutes qui suivent l'établissement du courant d'eau, l'affouillement se creuse très rapidement. Voir les photographies, 1, 2, 3 et 4 de la *fig. 47*. On aperçoit sur les clichés au pied de la pile de pont, un nuage blanc correspondant au premier enroulement qui entraîne des grains de sable.

Étape intermédiaire. — Quand l'affouillement atteint la valeur 1,2 *d*, c'est-à-dire à partir de la cinquième minute, son évolution commence à être retardée; et cela jusqu'à la trentième minute (voir phot. 5, 6, 7 et 8).

Étape II. — A ce moment l'affouillement atteint la valeur 2 *d* sensiblement. Il progresse encore, mais très lentement, pour se rapprocher asymptotiquement de la position d'équilibre 2,14 *d* (2,12 *d* après quatre heures). Le travail mécanique des filets d'eau est alors très réduit et la quantité de sable enlevé dans l'affouillement est très faible. Il se produit des éboulements à la partie la plus avancée de l'affouillement (clichés 9 et suivants), la quantité de sable enlevé est compensée par l'arrivée de nappes de charriage en amont du cratère.

Cette deuxième étape est illustrée par les photographies 8 à 16 de la *fig. 47*.

Corrélativement nous observons la formation des alluvions dans le sillage de la pile de pont.

Essai d'affouillement

Caractéristiques géométriques		*Caractéristiques hydrauliques*	
Largeur du canal	20 cm	Débit	46,04 m³ en 4 heures
Hauteur d'eau	8 cm		3,19 *l*/sec.
Section mouillée	160 cm²	Vitesse moyenne	19,9 cm/sec
Maquette de pile de pont diamètre	2,1 cm	Température	(11° — 12°)
		Nombre de Reynolds	$\mathcal{R} = 3345$

Données diverses

Rapport de réduction des photographies 8,9/21,0
Caractéristiques du sable employé : diamètre moyen des grains ..... 0,018 cm
Poids spécifique (à sec) ..... 1,44 g
« (mouillé) ..... 1,92 g

Numéro du cliché	Numéro de la photo	Temps écoulé en minutes	Dimensions de l'affouillement	Valeur relative de l'affouillement
(1)	1	0	0,00	0,00
	2	1	2,95	0,33
	3	2,5	6,15	0,69
	4	3,5	9,25	1,04
(2)	5	5	11,80	1,32
	6	10	15,10	1,69
	7	15	16,45	1,84
	8	20	17,40	1,95
(3)	9	30	17,55	1,97
	10	60	17,75	1,99
	11	90	18,05	2,02
	12	120 (2 h)	18,25	2,05
(4)	13	150	18,35	2,06
	14	180 (3 h)	18,45	2,07
	15	210	18,80	2,11
	16	240 (4 h)	18,90	2,12

Variations de l'affouillement avec l'épaisseur de sable.

Dans l'expérience d'affouillement que je viens de décrire l'épaisseur de sable était suffisamment grande pour que l'excavation ne découvre pas le fond du canal. J'ai opéré alors avec des épaisseurs de sable variées en étudiant chaque fois l'évolution du phéno-

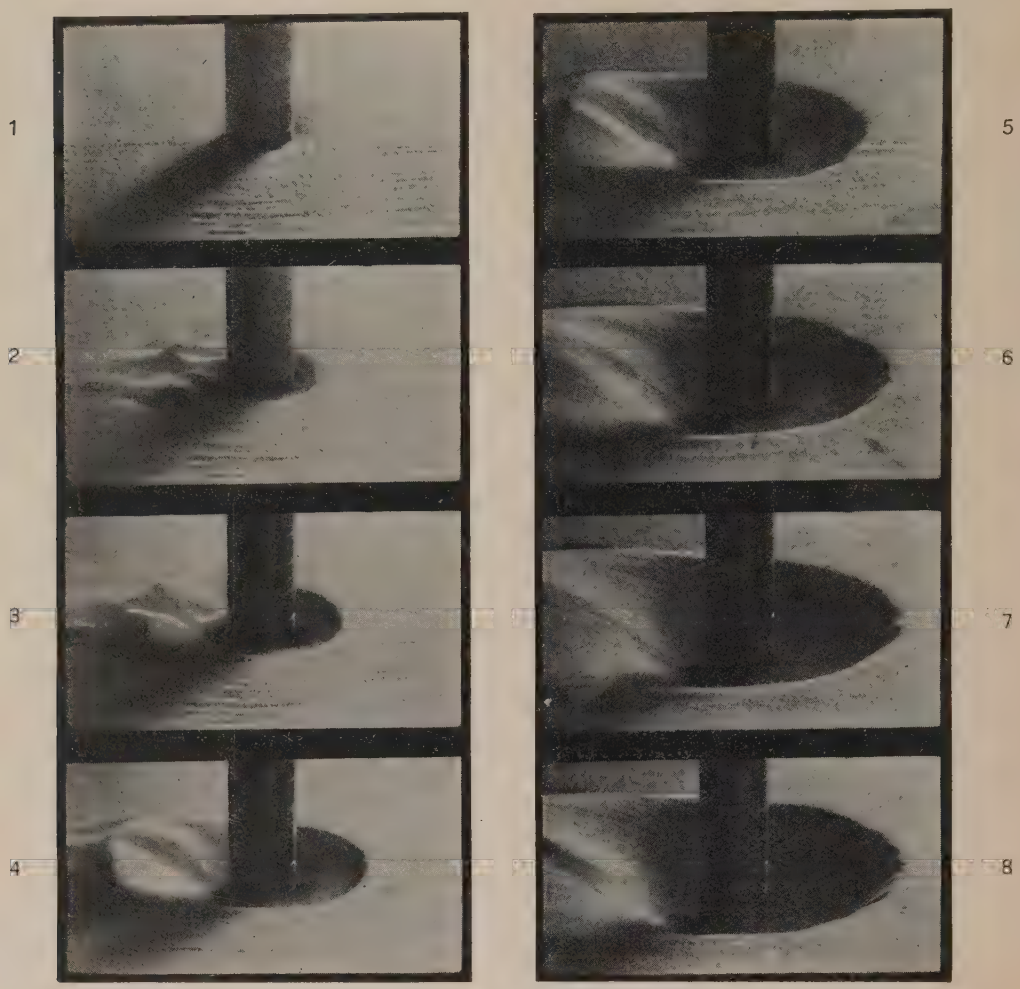


Fig. 47. — Évolution de l'affouillement à la base d'une pile de pont en fonction du temps.

mène. Il va sans dire qu'en diminuant l'épaisseur l'affouillement découvre de plus en plus la glace du fond du canal. Les résultats des recherches sont représentées dans la *fig. 48*. Voici les propriétés essentielles du phénomène.

Les débuts des différentes courbes d'affouillement, relatives aux épaisseurs de sable utilisées, à savoir : $\varepsilon = 20, 15, 6, 4$ mm, etc... ont approximativement la même pente, aux erreurs d'expérience près. Cela caractérise une vitesse constante de l'avancement de l'affouillement. Mais la longueur de cette partie de la courbe diminue au fur et à mesure que l'épaisseur de sable décroît elle-même, puisque la glace du fond est dégagée

d'autant plus rapidement que la couche de sable est plus faible; alors le creusement est naturellement ralenti et il ne se poursuit plus que dans le plan horizontal. A chaque épaisseur de sable utilisée correspond une valeur asymptotique de l'affouillement. Pour les épaisseurs très faibles, de l'ordre du mm, cette valeur tombe au-dessous de la valeur théorique trouvée pour les plages avec le fond lisse : 1,2 *d*. En opérant avec une seule

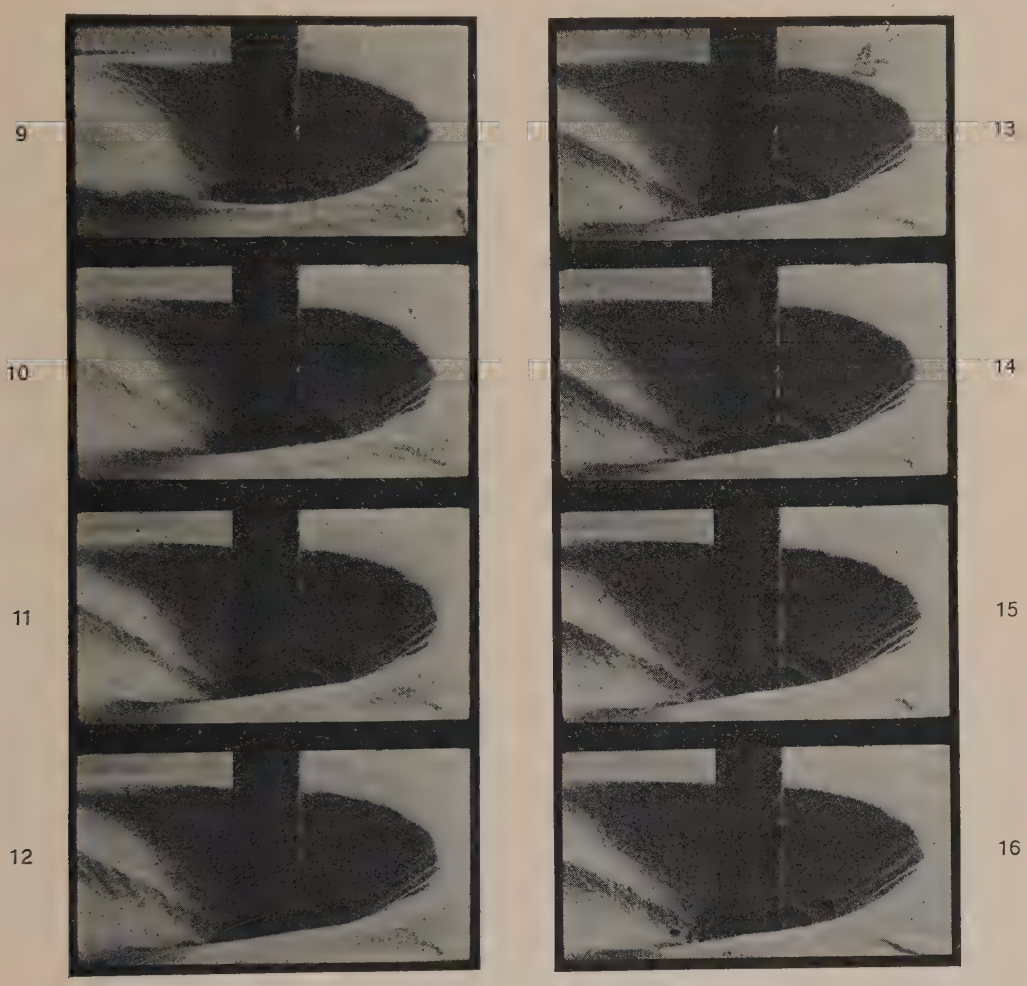


Fig. 47. — *(Suite).*

couche de grains de sable, la plage balayée, se rapproche de la valeur 0,6 *d*. Mais la nappe de sable se déchire et il est impossible de continuer les mesures. Il est d'ailleurs évident que nous ne pouvons pas trouver la valeur de la plage dans le cas du fond lisse puisque nous avons une paroi essentiellement rugueuse. En outre, en se rapprochant vers l'extrémité de la plage les vitesses locales décroissent pour tendre vers 0. Il en résulte, pour une forme de grains donnée, que le sable ne pourra plus être entraîné à partir d'une certaine distance du pied de l'obstacle, et nous matérialisons ainsi une plage qui est d'autant plus petite que les grains de sable sont plus volumineux. Inversement, si les

dimensions des grains diminuent, la plage va en croissant, et pour des grains infiniment petits, tel que les molécules d'un colorant, nous arrivons de nouveau à la limite trouvée pour les plages, à savoir : 1,2 *d*.

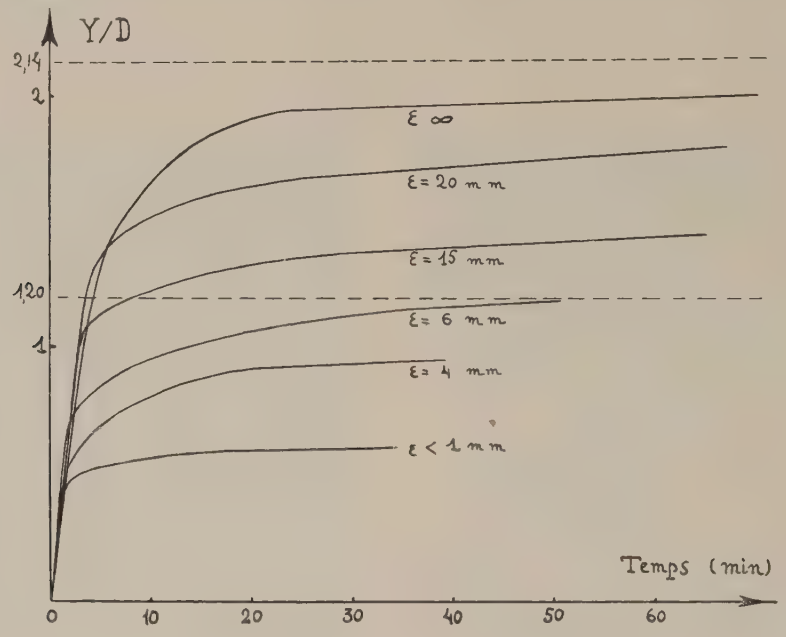


Fig. 48. — Variations de l'affouillement avec l'épaisseur de sable

Ces dernières considérations m'amènent enfin à parler des différents moyens utilisés pour éviter les affouillements.

Moyens d'éviter les affouillements.

Le moyen radical d'éviter les affouillements serait d'empêcher la formation des enroulements; or, on ne peut pas plus les réduire que le sillage de la pile de pont et on est alors amené à protéger le fond du cours d'eau (1).

En remarquant que le premier enroulement est le plus important de toute la série et que c'est par lui que commence l'affouillement, j'ai protégé la maquette de la pile de pont par un anneau horizontal, reposant sur le fond et dont la largeur est d'environ la distance du premier enroulement à l'obstacle (0,5 *d*). L'affouillement est alors

---

(1) Divers moyens sont utilisés suivant les cas :

Enrochement. — Le procédé le plus simple et le plus économique est de garnir le pourtour de la base de la pile de pont par une sorte de trottoir, réalisé avec de gros rochers enfouis dans les alluvions et dont le poids atteint plusieurs centaines de kilogrammes dans les grands fleuves. L'inconvénient de cette méthode est que l'enrochement est lui-même exposé à subir les affouillements (fortes crûes) et qu'alors la construction hydraulique est mise en danger imminent.

Caissons. — Dans le cas où le fond de la rivière est très mobile on entoure la pile de pont d'un caisson métallique formé de palplanches qui s'enfoncent de plusieurs mètres dans le lit de la rivière. Ce procédé est employé très fréquemment dans la Seine et dans le Rhin.

Pétrification artificielle du sol. — Un brevet tout récent permet dans certains cas de créer une pétrification artificielle du sol environnant la pile de pont, par injections sous fortes pressions d'un liquide, qui en se solidifiant formera un immense aggloméré très résistant.

arrêté complètement autant que si on prolongeait cet anneau. En le diminuant au contraire, le premier enroulement commence à creuser le fond et l'affouillement s'établit intégralement.

Il ne suffit d'ailleurs pas de protéger le fond de la rivière par une surface inattaquable, il faut en outre que, la construction supplémentaire possède une assez grande épaisseur pour qu'elle ne soit pas minée elle-même par le courant d'eau.

Une telle construction secondaire, protégeant les fondations de la pile de pont, joue d'ailleurs le rôle de seuil si son bord d'attaque émerge du fond de la rivière. Je vais étudier dans le paragraphe suivant l'influence de la hauteur d'un seuil sur le phénomène des enroulements. Aussi a-t-on intérêt à construire un trottoir en pente et dont l'extrémité amont s'engage suffisamment dans les alluvions pour ne pas être mise à jour par suite des variations accidentelles du fond.

LES OBSTACLES-SEUILS EN HYDRAULIQUE

Le cas d'un obstacle-seuil dérive immédiatement du cas cylindrique précédemment étudié; c'est un problème qui intéresse fortement l'hydraulique, tout autant que le cas cylindrique (obstacles émergeants). Le seuil élémentaire est représenté par la *fig. 49*. J'ai étudié l'écoulement au voisinage de cet obstacle en employant les principes énumérés au début de mon travail. Il y a une ligne singulière S aboutissant tout près du bord d'attaque du seuil et séparant le courant général du phénomène des enroulements.

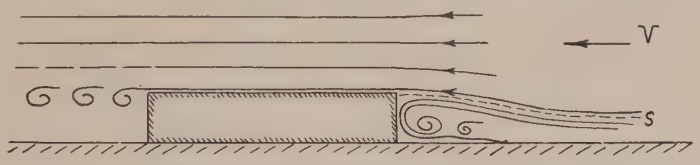


Fig. 49. — Écoulement au voisinage d'un obstacle-seuil

La *fig. 50* contient deux photographies montrant l'aspect des lignes de courant au voisinage d'un seuil. Nous voyons très nettement le premier enroulement et nous observons la formation de tourbillons horizontaux dans le sillage (le sens de ces tourbillons est d'ailleurs alterné).

Influence de la hauteur relative du seuil. — Le phénomène des enroulements, en particulier la dimension de la plage, sont fonctions de la hauteur du seuil. Si ce dernier, dépasse notablement l'épaisseur de la couche limite du fond (et, en dernier lieu, émerge du courant d'eau), nous sommes dans le cas du phénomène cylindrique; pour peu que la vitesse soit différente de 0, la plage atteint la valeur de 1,2 *d*. Mais si la hauteur du seuil va au contraire en diminuant le phénomène évolue. J'ai effectué des mesures de plages dans un écoulement connu au point de vue de la distribution des vitesses (fond lisse) et avec des seuils dont les hauteurs s'échelonnent depuis 0,1 cm jusqu'à 5 cm (hauteur d'eau de 5,8 cm). Les résultats sont portés dans le tableau ci-dessous :

Hauteur des seuils	5	4	3	2	1	0,7	0,55	0,45	0,37	0,27
Plages relatives	1,20	1,20	1,20	1,05	0,78	0,60	0,52	0,37	0,33	0,20

Les mesures sont représentées dans le graphique de la *fig. 51* ainsi que la distribution des vitesses loin du seuil. Voici les remarques essentielles qui se dégagent de cette étude : quand la hauteur du seuil est telle que sa partie supérieure atteint les couches

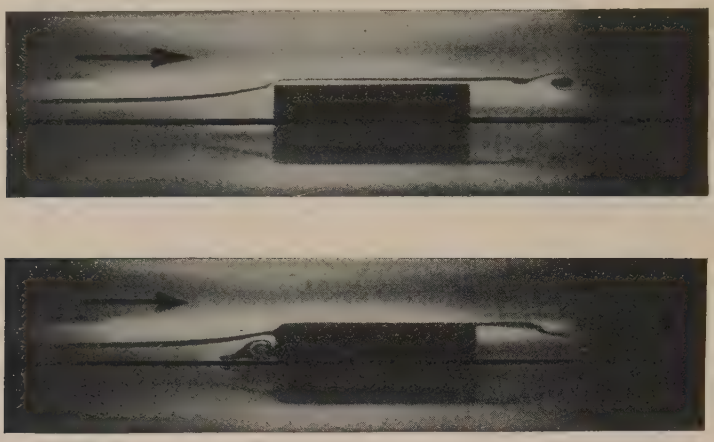


Fig. 50. — Écoulement au voisinage d'un seuil

centrales de l'écoulement (seuil de 5, 4 et 3 cm) le phénomène possède très sensiblement les propriétés d'un écoulement cylindrique. Dans ce cas la hauteur absolue du seuil n'a plus aucune influence, celui-ci pouvant émerger de l'eau ou non. Mais quand cette hauteur est telle que le bord d'attaque du seuil se trouve dans la couche limite, le phénomène est d'autant plus diminué que la hauteur est plus faible.

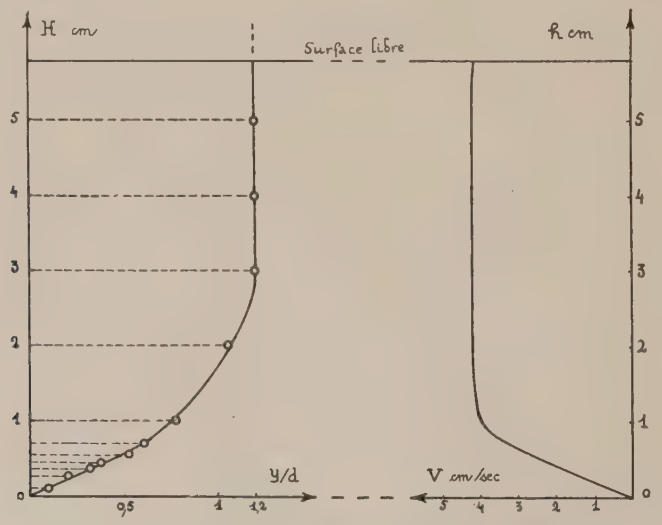


Fig. 51. — Influence de la hauteur d'un seuil sur les plages

Cette étude sommaire des seuils nous montre donc, sous un aspect différent, la relation qui existe entre le phénomène des enroulements et le gradient des vitesses au voisinage de la paroi. Elle permet aussi de tirer des conclusions intéressantes en ce qui concerne les affouillements en amont des seuils en hydraulique.

L'EFFET RÉSISTANCE

Considérations générales.

Je viens de montrer que le fait de limiter un obstacle cylindrique par des plans perpendiculaires à l'axe provoque non seulement l'apparition du phénomène des enroulements, mais encore le retardement des régimes d'écoulement avec le changement du décollement.

Il est donc légitime de se poser la question si la résistance unitaire d'un obstacle cylindrique se trouve diminuée en compartimentant celui-ci par des plans de section droite, sous la forme d'anneaux très minces, analogues aux ailettes d'un radiateur (voir *fig. 52*).

Si la résistance de forme d'un tel obstacle cloisonné (dont chaque élément se comporte comme un cylindre placé entre glaces parallèles) est effectivement diminuée par

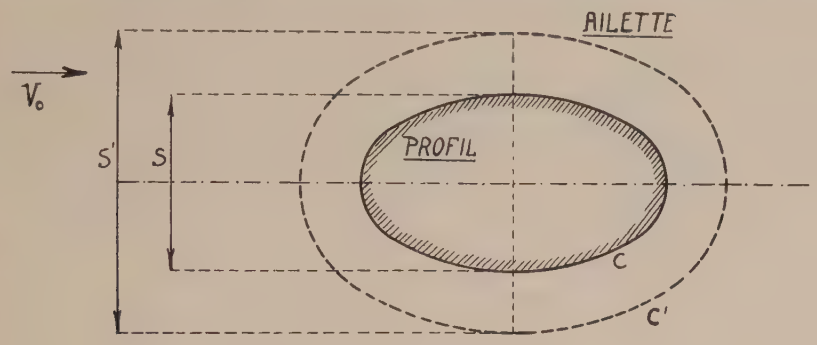


Fig. 52. — Obstacle à ailettes

suite de la réduction du sillage, pour des nombres de Reynolds faibles tout au moins, il n'en est pas de même de la résistance de frottement considérablement accrue par les surfaces des ailettes. Aussi, seuls le calcul ou l'expérience pourront-ils nous donner la réponse à cette question.

En ce qui concerne les recherches expérimentales, deux séries de mesures s'imposeraient à mon avis :

1° *Etude de l'influence de la largeur des ailettes.* — Il est certain que si la surface des ailettes va en croissant, l'augmentation de la résistance de frottement étouffera l'avantage que l'on se propose de tirer de ce dispositif. De plus il faudra analyser l'importance relative des parties amont et aval des ailettes.

2° *Etude de l'influence de l'écartement des ailettes.* — Il s'agit en particulier de rechercher un écartement optimum; il est du reste évident que si cet écartement tend vers 0, le maître-couple S de l'obstacle se trouve augmenté et égal à celui des ailettes, soit S'. Des phénomènes d'obstruction compliqueront certainement le problème.

Je citerai à l'appui de mon hypothèse les résultats de recherches expérimentales effectuées en 1923 qui, si elles sont indépendantes des phénomènes que je viens de décrire et si elles ont eu un but différent, correspondent en partie à l'effet en question.

Ailes d'avion cloisonnées.

Le Service Technique de l'Aéronautique a fait étudier des ailes d'avion munies de cloisons perpendiculaires à l'envergure (parallèles au courant d'air) en vue de l'amélioration de la polaire (1). La *fig. 53* est la reproduction d'une feuille d'essai.

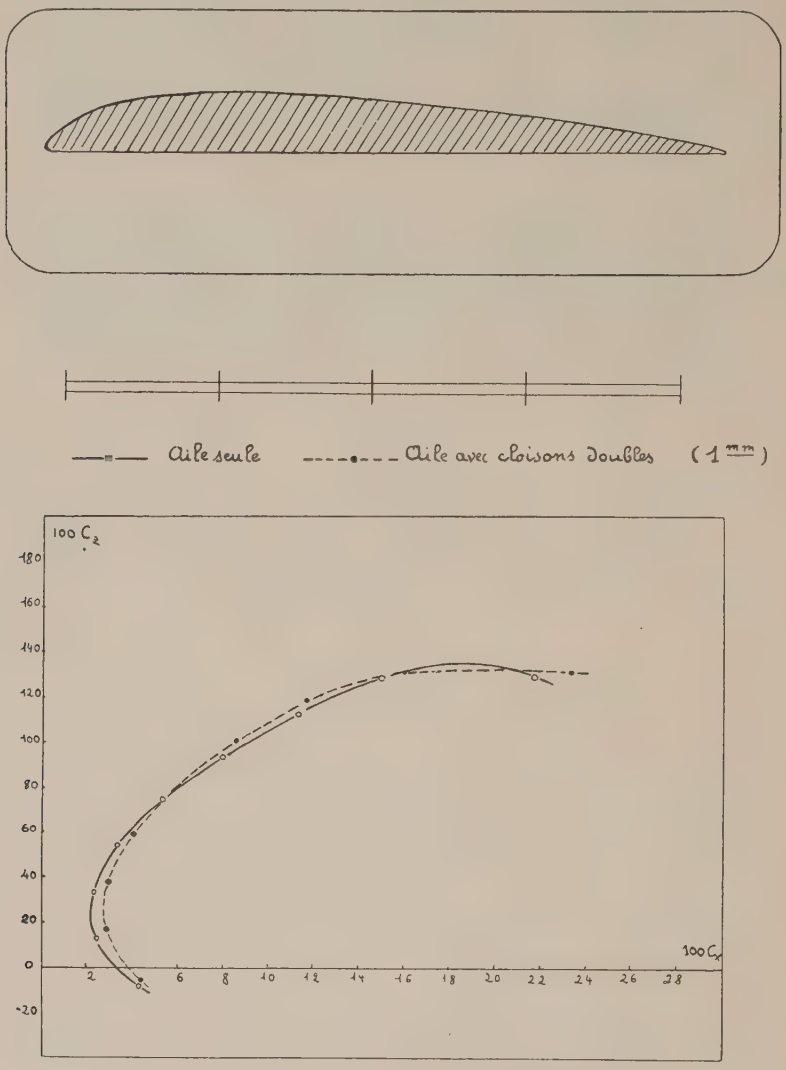


Fig. 53. — Polaire d'une aile munie de cloisons (d'après S. T. Aé.)

Les cloisons sont au nombre de cinq; à savoir : deux cloisons marginales, une cloison centrale, deux cloisons intermédiaires, elles affectent en gros la forme d'un rectangle circonscrit au profil d'aile.

---

(1) Bulletin Technique nº 25 Février 1925 *Service technique de l'Aéronautique.* Aérodynamique-Recherches Expérimentales (fascicule III). Profils d'ailes-Maquettes d'avions et d'hydravions.

La polaire est modifiée sensiblement et nous retenons les deux conclusions suivantes très importantes :

a) Pour des angles d'incidence moyens (100 Cz supérieur à 70) la polaire de l'aile munie de cloisons est au-dessus de la polaire de l'aile lisse. Pour une portance donnée il y a une diminution de la trainée de l'ordre de 6 %;

b) Pour des angles d'incidence grands, où l'aile lisse perd ses qualités de sustentation (polaire s'infléchissant vers le bas), la polaire de l'aile cloisonnée conserve au contraire son allure, sans accuser une décroissance de la portance.

Interaction aérodynamique Aile-Fuselage.

Des expériences élémentaires, que j'ai l'intention de poursuivre, ont vérifié mon hypothèse que le phénomène des enroulements, caractéristique d'un écoulement autour d'un obstacle limité, existe également à la racine d'une aile d'avion. Or on connaît l'effet nuisible de l'interaction aérodynamique aile-fuselage et de nombreuses recherches tant expérimentales que théoriques ont été entreprises à ce sujet.

Il serait certainement intéressant d'aborder ce problème en prenant comme point de départ l'étude du phénomène des enroulements dans cette configuration particulière et en essayant de modifier cette dernière d'après la nature de l'écoulement dans son voisinage.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LES LOIS GÉNÉRALES DE LA VISCOSITÉ DES LIQUIDES

Vu et approuvé :
Strasbourg, le 4 Avril 1936
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
A. DANJON

Vu et permis d'imprimer :
Strasbourg, le 16 Avril 1936
Le Recteur de l'Académie,
J. DRESCH